«*Математическая вертикаль*»
2020/2021 уч. год

Материалы по алгебре к первому блоку 7 класса

Повторение. Логика. Множества

Предисловие

Здесь предлагается достаточно объёмный материал к первому блоку 7 класса. В отведённые часы пройти его целиком может быть сложно. Мы рекомендуем прежде всего обратить внимание на основы, а более трудные задачи оставлять в качестве дополнительных, разбирать на кружке или вернуться к ним в будущем. Мы считаем очень важным в начале 7 класса тщательно повторить все виды вычислений с рациональными числами, добиться понимания определения процента, поговорить о множествах, познакомиться с понятием следствия и методом опровержения утверждений с помощью контрпримера и порешать арифметические задачи. А насколько углубляться в эти темы в конкретном классе — выбирает учитель.

Материал к дополнительной теме «Делимость целых чисел. Делимость как инвариант» будет выложен отдельным файлом.

Замечания, вопросы, комментарии присылайте на почту `vertical.algebra@179.ru`.

Список используемых обозначений

- $\boxed{\to}$ отмечает примеры;
- $\boxed{?}$ отмечает вопросы.
- $\boxed{\mathcal{M}}$ отмечает место, где применяется какой-то специальный *метод* решения задач.
- $\boxed{\mathbf{\Phi}}$ отмечает задачи-фокусы.
- Звёздочкой «*» отмечены задачи и разделы, не входящие в обязательную программу. Часто они труднее остальных, иногда — гораздо труднее.
- отмечает задачи-шутки.

Содержание

1 Повторение курса 5–6 класса. Логика

1.1 Числа и вычисления

1.1.1 Вычисления: не торопись считать

— Очень нам нужно ещё алмазы считать!
Тут мешки с мукой никак не сосчитаешь!
Прямо наказание какое-то! Двадцать раз
прочитал задачу — и ничего не понял!
Николай Носов. «Федина задача»

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 1.** На мельницу доставили четыреста пятьдесят мешков ржи, по восемьдесят килограммов в каждом. Рожь смололи, причем из шести килограммов зерна вышло пять килограммов муки. Сколько понадобилось машин для перевозки всей муки, если на каждой машине помещалось по три тонны муки? [*Из рассказа «Федина задача» Н. Носова*]

Решение. **Способ 1.** Задачу можно решить по действиям:
1) вычислить, сколько килограммов ржи привезли на мельницу;
2) представить, что всю рожь пересыпали в упаковки по 6 кг, и найти количество таких упаковок, разделив общую массу из (1) на 6;
3) вспомнить, что из каждой 6-килограммовой упаковки ржи получается 5 кг муки, так что умножить число упаковок из (2) на 5 и получить общую массу получившейся муки;
4) наконец, распределить всю муку по машинам, по 3 тонны, т.е. 3000 кг в машину, значит, разделить муку из пункта (3) на 3000.

Способ 2. Самые экономные не будут вычислять промежуточные результаты. Зачем умножать, если потом всё равно делить? Запишем процесс в виде одного выражения:

1) $450 \cdot 80$ (кг, всего зерна) $\rightarrow$ 2) $\frac{450 \cdot 80}{6}$ (упаковок зерна по 6 кг) $\rightarrow$
3) $\frac{450 \cdot 80 \cdot 5}{6}$ (кг, всего муки) $\rightarrow$ 4) $\frac{450 \cdot 80 \cdot 5}{6 \cdot 3000}$ (машин, по 3000 кг в каждой)

$\boxed{\mathcal{M}}$ Теперь **разложим на множители** числитель и знаменатель:

$$\frac{450 \cdot 80 \cdot 5}{6 \cdot 3000} = \frac{(9 \cdot 5 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 4 \cdot 10) \cdot 5}{(2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10)} =$$

и сократим одинаковые сомножители в числителе и знаменателе:

$$= \frac{9 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 3 \cdot 10} = \frac{5 \cdot 20}{10} = 5 \cdot 2 = 10$$

Ответ. 10 машин.

$\boxed{?}$ **Вопрос 1.** А вам какой способ больше нравится: вычислить всё по действиям или записать большое выражение и упростить его?

Замечание 1. Догадались ли вы, зачем слева на полях появилась буква «М» в рамке? Здесь и далее значок $\boxed{\mathcal{M}}$ отмечает место, где использован важный **метод** — в данном случае, метод **разложения числа на множители**.

Задача 1. В 450-граммовой пачке печенья 7 упаковок по 4 печенья в каждой. Лагерь собирается в течение 4 дней выдавать на полдник по 3 таких печенья 140 ребятам. Всё печенье разложили в три одинаковых больших коробки. Сколько весит каждая из них?

Задача 2. Друзья Лёня и Артём часто платят друг за друга в столовой, а в конце недели рассчитываются. Обед стоит 119 рублей, мороженое — 44 рубля, шоколадка — 25 рублей. Лёня в понедельник оплатил каждому обед и по 2 мороженых, а во вторник — обед и по 3 шоколадки. Артём оплатил в среду каждому обед, по мороженому и по шоколадке, а в четверг — обед и по 2 шоколадки, а в пятницу ребята поехали на экскурсию, где тратить деньги не пришлось. Кто кому должен деньги за эту неделю и сколько?

Задача 3. Вычислите без калькулятора, действуя как можно более экономно.[1]

а) $357 + 17999 + 1$;
б) $468 + 17999$;
в) $899 + 1343 + 101$;
г) $\dfrac{15 \cdot 35 \cdot 63 \cdot 27}{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81}$;
д) $0{,}378 + 1{,}9 + 18{,}64 - 2{,}378 + 0{,}1 - 8{,}64$;
е) $\dfrac{64 \cdot 243 \cdot 343}{36 \cdot 28 \cdot 63}$;
ж) $37 \cdot 25 \cdot 4$;
з) $7 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Ф **Задача 4.** Мы покажем вам фокус. Возьмите любое трёхзначное число и умножьте его на 13. Результат умножьте сначала на 11, а затем на 7. Замечаете ли что-то интересное? Можете ли предсказать, что получится, если задумать 256? Как объяснить этот эффект?

Задача 5. Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 648 метров. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

Задача 6. **а)** Алёша сложил десять троек, а Боря — три десятки. У кого ответ больше?
б) Ариша перемножила десять троек, а Варя — три десятки. У кого ответ больше?

Задача 7. Сравните:
а) $137 + 252 + 398$ и $140 + 250 + 400$;

б) $225 + 325 + 425 + 525$ и $100 + 200 + 300 + 400 + 500$;

в) $13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13+13$ и $26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 26 + 26$;

г) $111 \cdot 246 \cdot 98 \cdot 17$ и $222 \cdot 123 \cdot 98 \cdot 17$; **д)** $240 \cdot 130 \cdot 170$ и $120 \cdot 130 \cdot 350$;

е) $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36 \cdot 49 \cdot 64 \cdot 81$ и $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$;
ж) $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}$ и $\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128}{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128 \cdot 256}$;
з) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}$ и 1; **и)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16}$ и 1; **к)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{64}$ и 1;
л) $\frac{17}{2} + \frac{17}{4} + \frac{17}{8} + \frac{17}{16}$ и 17;

м) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ и $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$;

н) $2 \cdot 2$ и $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$;

о) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ и $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

п) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$ и $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10$;

р) $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32$ и $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$;

с) $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128$ и $16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16$;

т) $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 128 \cdot 256 \cdot 512$ и $32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32$;

Задача 8*. Перемножили 33 восьмёрки, 1 семёрку и 100 пятёрок. Найдите количество цифр и сумму цифр получившегося в результате числа.

З ‖ См. также упражнения из задачника [1]: **стр. 5** A1–A5; **стр. 8** C7, C8.

[1]Пункты **а**, **б**, **в**, **ж** взяты из замечательной книги [2].

1.1.2 Вычисления на практике

— Давай всё-таки разберёмся, — предложил слонёнок. — Десять орехов — это куча?

Григорий Остер. «Как лечить удава»

→ **Пример 2.** Руководитель покупает билеты на электричку для группы из 17 человек. Билет в один конец стоит 196 рублей. В кассе временно не принимают банковские карточки, а электричка вот-вот отправится. Как быстро прикинуть, сколько тысяч рублей нужно снять в близлежащем банкомате, чтобы точно хватило на билеты туда и обратно?

Путь к решению. Умножать на бегу 196 на 2 и на 17 — не самое простое занятие. Может, достаточно округлить до десятков?

Ответ. Людей в группе не больше 20, а билет стоит не больше 200 рублей, значит, понадобится не больше $200 \cdot 2 \cdot 20 = 400 \cdot 20 = 8000$ рублей.

? **Вопрос 2.** Не слишком ли грубо мы оценили число людей? Может, хватило бы и 7 тысяч?

Ответ. Мы «запасли» деньги на билеты для трёх лишних пассажиров, т.е. $196 \cdot 2 \cdot 3$, это *почти* $200 \cdot 6 = 1200$ рублей, так что, видимо, хватило бы и 7 тысяч.

? **Вопрос 3.** Кстати, какова ошибка при замене $196 \cdot 2 \cdot 3$ на $200 \cdot 6$?

→ **Пример 3.** Поместится ли всё население Земли в куб со стороной 3 км?

Решение. Сколько же людей на Земле? Составитель задачи не знал, но, погуглив, выяснил, что их (точнее, нас) на тот момент по мнению сайта www.worldometers.info было 7722064625 человек. Но это число очень быстро меняется, прямо на сайте! И, наверняка, данные не точные. К тому же, люди бывают разного размера. Как же всё это учесть?

$\mathcal{M}$ Возможно, детали не важны? Попробуем **оценить** ситуацию и **отбросить лишнее**. Ответьте на такие по-настоящему важные вопросы:

- Сколько метров в километре?
- Сколько цифр в числе 7722064625?
- Сколько места достаточно выделить человеку, чтобы он там точно поместился?
- Сколько человек можно поставить *на дно* куба с ребром 1 км?

Составитель задачи решил выделить каждому человеку комнату высотой 3 метра, шириной и длиной в 1 метр. (Разумно ли это предположение? Даже если бывают великаны, которые не поместятся в такую комнату, гораздо больше людей, которые смогут уместиться и в меньшем пространстве, освободив немного места для великанов.)

В одном **кило**метре тысяча метров, то есть в ряд длиной 3 км (вдоль стороны куба) можно поставить 3000 комнат (шириной 1 м каждая). Это только один ряд, а таких рядов на дне куба — 3000, т.е. всего $3000 \cdot 3000 = 9000000$ — девять миллионов человек поместятся таким способом на «первом этаже» нашего куба.

А сколько таких этажей получится? Высота куба 3000 метров, а одной комнаты — 3 м. Значит, тысяча этажей. И на каждом девять миллионов комнат!

Всего получается $9000000 \cdot 1000 = 9000000000 = 9$ млрд комнат. В числе 7722064625 всего 10 цифр, то есть население Земли (на момент составления задачи) находится где-то между семью и восемью миллиардами, и в 9 миллиардов комнат должно влезть.

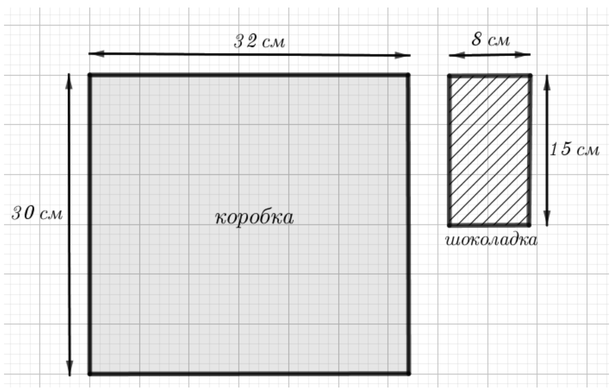
Ответ. Поместится.

? **Вопрос 4.** Не лучше ли было взять комнату высотой 2 м вместо 3 м? Ведь большинство людей ниже 2 метров. Как поменялись бы расчёты? Как поменялся бы ответ?

В следующих задачах мы сначала формулируем общий вопрос, а потом уточняем его, даём подсказки и задаём другие вопросы. Не торопитесь читать сразу все пункты — сначала попробуйте ответить на исходный вопрос самостоятельно.

Задача 9. **а)** Как вы думаете, сколько кусочков в килограммовой пачке сахара-рафинада? Много ли это? Допустим, ваш класс будет пить чай на большой перемене и каждый положит два кусочка в кружку — на столько таких чаепитий хватит пачки?
б) Составитель задачи взял с полки пачку сахара, она была как раз нужного размера, но сахара там оставалось совсем немного — дно даже в один слой не было покрыто. Тем не менее, составитель задачи смог посчитать, сколько кусочков было в этой пачке изначально. А как бы вы это сделали на его месте?
в) Составитель задачи не использовал ни весы, ни линейку, и количество кусков на упаковке не было написано. Выложив оставшиеся кусочки в ряд, составитель выяснил, что по длине в коробку укладывается 12 кусочков, по ширине — 5, по высоте — 3. Напомним, что кусочков в коробке было немного, даже дно не покрывалось, т.е. их было меньше, чем в одном слое. А сколько кусочков в одном слое? Сколько слоёв в коробке?
г) Вернитесь к пункту **а)** и ответьте на его вопросы, учитывая пункт **в)**.
д) На коробке написано, что в сахаре содержится 400 Ккал на 100 г. Сколько же килокалорий в одном кусочке сахара?

Задача 10. **а)** Оцените, сколько учеников в вашей школе (в том здании, где вы учитесь). Теперь давайте обсудим: это много или мало?
б) Допустим, выпускник школы хочет в честь начала года купить каждому ученику вашей школы по шоколадке (стандартной, весом 100 г). Сколько будут весить все шоколадки вместе? Сможет ли щедрый выпускник сам сразу поднять все эти шоколадки и донести от магазина до школы? Есть ли шанс донести их вдвоём с другом?
в) Выпускник из предыдущего пункта решил не ходить в магазин сам, а сделать интернет-заказ. Шоколадка имеет толщину 1 см, длину 15 см и ширину 8 см. В магазине шоколадки уложили в коробку с дном размером 30×32 см и высотой 10 см — в 10 слоёв. Сколько шоколадок покрыли дно коробки, когда упаковщик уложил первый слой? Нарисуйте, как лежат шоколадки. Сколько всего шоколадок в коробке? Сколько весит коробка? Сколько таких коробок должны привезти в вашу школу?



Задача 11. Допустим, к первому уроку в школу пришло 1000 человек и каждый в течение 5 секунд стоял перед единственным работающим турникетом и прикладывал карточку. Сколько минимум времени потребовалось бы на проход этих людей в школу? Все ли они успели бы к 8:30 на урок, если первый из них подошёл к турникету в 07:25?

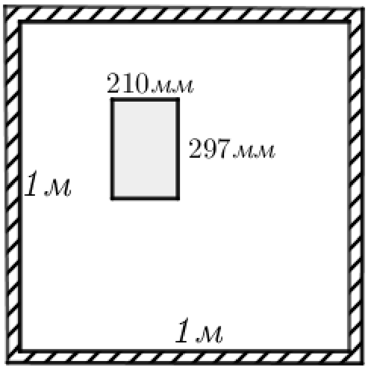
Задача 12. [4, 1.3] Грузчик на складе может поднять упаковку размером $3 \times 3 \times 3$ литровых пакетов молока. Смогут ли три грузчика поднять упаковку $9 \times 9 \times 9$ пакетов? Во сколько раз одна упаковка тяжелее другой?

Задача 13. Тигра умеет бегать со скоростью 60 км/ч и очень хочет научиться тратить на каждый километр на одну минуту меньше. С какой скоростью нужно научиться бегать Тигре, чтобы исполнить своё желание?

Задача 14. Наташа чистит крыжовник для варенья, отрезая плодоножку у каждой ягодки. Она задумалась, сколько ягодок за час он таким образом обработает, и стала посматривать на свои электронные часы, показывающие часы и минуты. Работа однообразная, так что не будет большой погрешностью считать, что Наташа работает *равномерно*.
а) Подумайте, как с высокой точностью измерить скорость Наташи.
б) Первый раз часы показали 11:25, а когда Наташа почистила 2 ягодки, они показывали уже 11:26. «Получается, примерно 2 ягодки в минуту, то есть 120 ягодок в час», — подумала Наташа. Может ли она ошибаться? Насколько сильно?
в) Наташа почистила ещё 22 ягодки, взглянула на часы — они показали только 11:27. Какие выводы о скорости обработки ягод можно сделать?
г) В частности, возможно ли, что Наташа обрабатывает ровно 20 ягод в минуту?
д) Возможно ли, что Наташа обрабатывает больше 25 ягод в минуту?
е) Возможно ли, что Наташа обрабатывает меньше 10 ягод в минуту?

Задача 15. **а)** Для получения оценки «3» за бег на 1 км мальчику в 7 классе нужно уложиться в 5 минут. С какой средней скоростью необходимо бежать?
б) Девочкам в 7 классе на оценку «5» за бег на 60 м нужно уложиться в 9,8 с. С какой средней скоростью нужно бежать?
в) Выразите скорость из пунктов **а**, **б** в км/ч и сравните со скоростью животных, например, на сайте `animalspeed.ru`.
г) Выразите скорость из пунктов **а**, **б** в м/с и сравните со скоростью ветра в прогнозе погоды на завтра и со скоростью ветра по шкале Бофорта `meteoinfo.ru/bofort`.
д*) Измерьте скорость своего бега, пробежав от одной до другой стены кабинета в школе или комнаты дома. Запишите расчеты, оцените погрешность. Повторите эксперимент в коридоре или на улице.

Задача 16. На пачке бумаги А4 написано, что её плотность — 80 г/м^2, размер — 210×297 мм, а всего в пачке 500 листов.



а) Сколько потребуется листов, чтобы целиком оклеить квадратный стенд 1×1 м? Нарисуйте, как вы предлагаете его заполнить листами бумаги. Ножницы можно использовать.
б) Сколько весит один лист бумаги и сколько — вся пачка?
в) Каждому из 1200 участников олимпиады нужно выдать анкету, правила и условия трёх туров. Анкета занимает лист А4, правила — пол-листа А4 и условия каждого тура — тоже по пол-листа А4 каждый. Печатать с двух сторон нельзя. Сколько пачек бумаги (описанной выше) нужно купить оргкомитету, чтобы распечатать весь этот материал?
г) Как вы думаете, сможет ли председатель оргкомитета в одиночку за 1 раз дотащить заказанную для предыдущего пункта бумагу с первого этажа на третий?
д) А сколько пачек потребуется дополнительно, чтобы распечатать для всех участников решения задач, которые занимают два листа А4, и сертификат участника, который занимает один лист А4?

Задача 17. Лагерь должен закупить кефир на вечернее питание для 240 человек. Каждому полагается полный стакан (250 мл).
а) Сколько литровых пакетов кефира нужно заказать?
б) Заказ привезли. Оказалось, что магазин упаковал кефир в коробки размером $24 \times 30 \times 17$ см. Как вы думаете, сколько пакетов кефира в каждой коробке? Сколько весит одна такая коробка и сколько коробок водитель выгрузит в лагере?

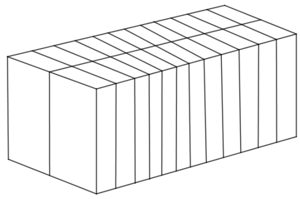
Задача 18. **а)** На кухне три лампочки в люстре и одна в светильнике над раковиной. Мощность лампочек в люстре 60 Ватт, в светильнике — 70 Ватт. Предполагая, что свет на кухне горит в течение часа утром и в течение трёх часов вечером, вычислите, сколько денег уйдёт на оплату освещения на кухне за ноябрь при тарифе 5,47 руб. за кВт.ч.

Электроэнергию принято измерять в кВт.ч (*произносится: «киловатт-час»*). *Мощность равна отношению затраченной энергии к времени работы. Например, за 10 часов работы прибора мощностью 100 Вт тратится 1кВт.ч энергии.*

б) Какова будет экономия, если заменить все лампочки накаливания на энергосберегающие светодиодные лампы мощностью 10 Вт? Окупится ли за ноябрь стоимость этих ламп, если каждая стоит 90 руб.?

в) Что даст большую экономию: полный отказ от использования электрического чайника мощностью 2 кВт или выкручивание одной лампочки мощностью 60 Вт, если сейчас лампа горит примерно 12 часов в день, а чайник используется 5 раз в день по 2 минуты?

Задача 19. Вам подарили аквариум. Измерив его линейкой, вы выяснили, что ширина аквариума 61 см, глубина 31 см, высота 37 см. Как вы думаете, сможете ли вы поднять этот аквариум после того, как наполните его водой? Сколько раз вам придётся сходить в ванную с двухлитровой бутылкой, чтобы наполнить аквариум?



Задача 20. Люба сушит чёрные сухари в поход на всю группу. В группе 10 участников, сухари нужны на обед и ужин на 5 дней. На обед каждому полагается 1 чёрный сухарь, на ужин — 2 чёрных сухаря. Для приготовления сухарей 800-граммовая буханка бородинского хлеба режется на 12 кусков, и каждый кусок — пополам, см. схему.

а) Сколько буханок чёрного хлеба нужно купить Любе?

б) У Любы два одинаковых противня, на каждый помещается 28 кусков хлеба. Сухари должны сушиться в духовке 3 часа. Сколько времени понадобится на сушку всех сухарей?

в) Люба взвесила первую партию сухарей и выяснила, что они весят в среднем 20 г. Сколько примерно будут весить все сухари, которые Люба возьмёт в поход?

Задача 21. Допустим, вы решили угостить ириской каждого ученика вашей школы. Сколько килограммов ирисок вам нужно купить в магазине?

Задача 22*. Оцените и объясните, какие данные вы использовали и какие предположения сделали:

а) поместился бы в ваш класс взрослый кит, слон, жираф, тигр;

б) сколько человек смогут комфортно стоять на пустой площадке, равной по форме вашему кабинету математики;

в) сколько человек живёт в вашем доме;

г) сколько человек могут сидеть в одном вагоне метро;

д) сколько человек могут стоять в одном вагоне метро.

Задача 23*. Давайте построим цепочку от вас к вашему отцу, от отца — к деду, от деда — к прадеду — и так далее, от каждого очередного вашего предка к его отцу. Оцените, сколько примерно человек соединяют вас с вашим предком, жившим

а) в момент отмены крепостного права;

б) во времена А.С. Пушкина;

в) во времена крещения Руси;

г) во времена Древней Греции.

д) Поместились ли бы все эти люди в вашем школьном кабинете?

Задача 24*. Придумайте свою задачу на оценку количеств на практике.

З ‖ Также по этой теме можно использовать из книги [1] задачи со **стр. 110–111**: А1–А9.

1.1.3 Делимость

З По теме «Делимость» можно использовать следующие упражнения из задачника [1]: **стр. 225–226** A1–A3, A5, A9, A10; **стр. 7** B14.

Пример 4. Трое друзей хотят арендовать корт на час, чтобы поиграть в бадминтон, а аренда стоит 1000 рублей в час. Могут ли они скинуться *в точности* поровну?

Решение. Иными словами, нас спрашивают, делится ли 1000 на 3? Возможно, вы скажете, что *нацело* не делится, но можно разделить с остатком: $1000 = 333 \cdot 3 + 1$. На самом деле, добавлять «нацело» нет необходимости, так как в математике принято следующее

Определение 1. Одно целое число *делится* на другое целое число, если первое из них можно разделить на второе нацело, без остатка.

Итак, 1000 на 3 не делится. Помогут ли нашим друзьям копейки? 1000 рублей — это 100 000 копеек, тоже не делится на 3, т.к. на 3 делится число $99\,999 = 100\,000 - 1$.
Ответ. Не смогут.

Замечание 2. Более строго, на *алгебраическом языке*, определение 1 звучит так.

Определение 2. Целое число a *делится* на целое число b, если найдется такое единственное целое число k, что $a = kb$.

Задача 25. Выясните, делится ли:
а) 123 на 12;
б) 123 на 3;
в) 2019 на 3;
г) 2020 на 3;
д) 2019 на 101;
е) 1000 на 8;
ж) 28000 на 8;
з) 28035 на 7;
и) 28055 на 7;
к) 27993 на 7;
л) 10000 на 16;
м) 100000 на 32;
н) 700000 на 32;
о) 700064 на 32;
п) 700104 на 32;
р) 133133133 на 7;
с) 112233 на 11;
т) 112234 на 11;
у) 123123 на 13;
ф) 256256 на 13.

Задача 26. **а)** На какое число игроков можно поровну поделить 12 фишек?
б) Сколько, минимум, должно быть фишек в игре, чтобы их можно было поделить поровну на любое число игроков от 2 до 6?

Определение 3. *Делителями* числа называются натуральные числа, на которые данное число делится. Каждое натуральное число делится на себя и на 1.

Задача 27. Найдите все делители числа: **а)** 6; **б)** 7; **в)** 33; **г)** 32; **д)** 31; **е)** 1000.

Вопрос 5. Какое число имеет только один натуральный делитель?

Определение 4. Числа, имеющие ровно 2 натуральных делителя, называют *простыми*. Числа, имеющие более двух натуральных делителей, называют *составными*.

Задача 28. Являются ли простыми числа:
а) 246; **б)** 13; **в)** 77; **г)** 41; **д)** 51; **е)** 91; **ж)** 101; **з)** 111; **и)** 1001; **к)** 3131313131?

Задача 29. В Солнечном городе живут 25 коротышек. У каждого из них есть три воздушных шарика: красный, синий и жёлтый. Смогут ли они так поменяться шариками, чтобы у каждого все три шарика оказались одноцветными?

Задача 30. Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько у них секунд в сутках?

Задача 31*. Про число жителей Цветочного города Тюбик сказал, что оно делится на 2, Авоська: делится на 6, Небоська: делится на 3, Незнайка: делится на 4. Оказалось, двое коротышек пошутили, а двое — сказали правду. Можно ли определить, кто пошутил?

Задача 32*. [3, 3.18] Пушкин родился 6 июня 1799 года (по новому стилю). Какой это был день недели? Учтите, что 1800 и 1900 годы не были високосными.

1.1.4 Обыкновенные дроби и доли

Удачно, когда одно число *делится* на другое! Иначе частное оказывается дробным числом, а это, согласитесь, не так приятно. Кстати, а хорошо ли вы разбираетесь в дробях?

Например, сможете ли вы объяснить, что такое $\frac{1}{3}$, млашему брату, сестре или другу, ничего не смыслящему в математике? А также объяснить им,

- что такое $\frac{2}{5}$?
- что больше: $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{5}$?
- что получится, если сложить $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$?
- чему равны $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}$ и $\frac{2}{3} : \frac{1}{6}$?

3 Из задачника [1] могут пригодиться следующие упражнения на обыкновенные дроби:
стр. 9–13 A6–A13, A15, B1, B2, B5–B7, B9, B10, C1, C3, C4, C6, C8, C9, C15.

Задача 33. В Волшебной стране две трети дней — выходные, а в каждой неделе 6 выходных дней. Сколько будних дней в неделе?

Задача 34. В столовой предлагают на выбор получить либо один пирог на троих, либо два таких же пирога на пятерых. В каком случае доля пирога на человека больше?

Подсказка. Представьте, что две группы по 3 человека используют первую схему...

Задача 35. Одноклассники заказали пиццу и договорились есть по $\frac{1}{6}$ части пиццы. В конце осталось $\frac{2}{3}$ пиццы. Сколько человек могут взять ещё по $\frac{1}{6}$?

Задача 36. Хозяйка не уверена, сколько гостей к ней придёт. На сколько равных кусков, самое меньшее, нужно разделить торт, чтобы его можно было раздать поровну
а) и троим гостям, и пятерым? Сколько кусков достанется гостю в каждом случае?
б) и четверым гостям, и шестерым? Сколько кусков достанется гостю в каждом случае?

Задача 37. **а)** Двенадцать семиклассников поделили поровну три пиццы. Какую часть пиццы съел каждый? *Для проверки можно нарисовать пиццу и поделить её на куски.*
б) Решите уравнение $12x = 3$.

Задача 38. **а)** Шестеро семиклассников съели 15 яблок. Сколько яблок съел каждый?
б) Решите уравнение $6x = 15$.

Задача 39. Решите уравнения. *Для проверки можете представлять, что семиклассники делят пиццу или яблоки, как в предыдущих задачах.*

а) $9x = 3$;	**в)** $20x = 10$;	**д)** $8x = 24$;	**ж)** $6x = 8$;
б) $4x = 1$;	**г)** $21x = 3$;	**е)** $8x = 28$;	**з)** $5x = 11$.

Задача 40. Что больше: **а)** два пирога на шестерых или пять пирогов на 15 человек?
б) два пирога на семерых или один на троих?
в) три пирога на пятерых или два на троих?
г) четыре пирога на девятерых или три пирога на семерых?

Задача 41. **а)** Две трети класса идут в поход. Сколько человек из класса идёт в поход, если в классе 27 учеников?
б) Половина пирожков — сладкие. Две трети сладких пирожков — с малиновым вареньем. Какая доля всех пирожков — с малиновым вареньем?
в) В ящике с фруктами яблок — 50, а кислых яблок — 40. Какая доля яблок — кислые?
г) Половина фруктов — яблоки. Кислые яблоки составляют $\frac{2}{5}$ всех фруктов. Какая доля яблок — кислые?

Задача 42. **а)** Что больше: $\dfrac{26}{27}$ или $\dfrac{226}{227}$?
б) Паша и Витя тренировали штрафные броски в баскетболе, и каждый промахнулся лишь однажды. Паша выполнил 27 бросков, а Витя — 227. У кого доля попаданий выше?
в) Как связаны пункты **а** и **б** этой задачи?

Задача 43. **а)** Что больше: $\dfrac{2019}{4320}$ или $\dfrac{2020}{4321}$?
б) До поступления Серёжи в школе №4321 было 4320 учеников, из них 2019 — мальчики. Увеличилась ли доля мальчиков в школе №4321 после поступления новичка Серёжи?
в) Как связаны пункты **а** и **б** этой задачи?

Задача 44. Числитель и знаменатель дроби уменьшили на 1. Могла ли дробь при этом уменьшиться? А увеличиться?

Задача 45. **а)** [3, 2.17] Числитель обыкновенной дроби увеличили на 1, а знаменатель — на 1000. Могла ли дробь при этом увеличиться?
б) В город переехали 1000 человек, ровно один из которых — математик. Могла ли при этом доля математиков в городе вырасти?

Задача 46*. Трое ребят перешли из 7«А» в 7«Б». Могла ли при этом в каждом из двух классов вырасти доля отличников?

Задача 47*. Есть два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак. Доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Верно ли, что доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?

Задача 48. Не прибегая к вычислениям, расположите в порядке возрастания дроби:
$$\frac{197385}{197388},\ \frac{179482}{179485}\ \text{ и }\ \frac{197385+179482}{197388+179485}.$$

Задача 49*. Даны две дроби. Незнайка сложил их неправильно: в числитель написал сумму числителей, а в знаменатель — сумму знаменателей.
а) Что вы можете сказать про получившуюся дробь?
б) Отдельно рассмотрите случай, когда исходные дроби были равны.
в) Придумайте практическую интерпретацию для Незнайкиного «суммирования».
Подсказка. Частный случай такой интерпретации есть в одной из предыдущих задач.
Задача составлена по мотивам [2, п.15].

Задача 50*. [2, $\boxed{45}$] Метровый стержень разделили на 7 равных частей красными пометками и на 13 равных частей синими пометками. Затем его распилили на 20 равных частей (не обращая внимания на сделанные ранее пометки). Докажите, что на всех этих частях (кроме крайних) будет ровно одна пометка (синяя или красная).

Задача 51*. На сколько частей, самое меньшее, нужно разделить торт, чтобы его можно было раздать поровну и четверым гостям, и шестерым?

$\boxed{?}$ **Вопрос 6.** Чем отличаются задачи 36(б) и 51?

Задача 52*. «В этой фразе доля цифр X равна $\ldots/\ldots$, доля цифр Y — $\ldots/\ldots$, а на долю остальных использованных цифр остается $\ldots/\ldots$.». Вставьте разные цифры вместо X и Y и числа вместо многоточий так, чтобы утверждение было верно. [7, 2011 г.]

1.1.5 Проценты

Замечание 3. Многие задачи этого раздела можно решить как алгебраическим способом (с помощью уравнения), так и арифметическим (прямыми рассуждениями). Мы рекомендуем обратить внимание прежде всего на арифметический способ и постоянно возвращаться к **смыслу понятия «процент»**, поскольку основная задача сейчас, на наш взгляд, — хорошо разобраться в определении 5. Стоит сконцентрироваться на этой цели и не переходить к более сложным задачам, пока она не достигнута. Часть задач этого блока может быть целесообразно оставить на следующие темы (решение задач арифметическим способом, составление уравнений) или вернуться к ним ещё позже.

Знаете ли вы, откуда происходит слово «процент»? От латинского *per cent*, что буквально означает «на сотню». Сохранило ли наше современное слово этот исходный буквальный смысл? Рассмотрим несколько примеров.

- «Пассажир оплачивает 50% стоимости проезда в скором поезде» — значит, нужно оплатить только 50 рублей **на каждую сотню**, т.е. половину обычной стоимости.
- «Для зачёта необходимо дать не менее 60% верных ответов» — значит, хотя бы 60 верных ответов нужно дать **на каждую сотню** вопросов. Было задано 300 вопросов? Это 3 сотни, значит, нужно хотя бы $3 \cdot 60 = 180$ верных ответов! А если в тесте всего 20 вопросов? Сколько будет 60% от 20?
- «В современном футболе около 75% пенальти забивают» — значит, примерно 75 забитых голов приходится **на сотню** назначенных 11-метровых ударов. Какая это доля? 75 забивают, 25 не забивают, т.е. соотношение 3 к 1 (3/4 забивают, 1/4 не забивают), из четырёх назначенных пенальти три становятся голом.

? **Вопрос 7.** А вам какие случаи употребления слова «процент» в жизни кажутся наиболее распространёнными? Объясните их смысл.

⊙ **Определение 5.** *Процент* — это одна сотая часть, т.е. $\dfrac{1}{100}$.

Замечание 4. Короткое определение 5 по сути содержит всё, что нужно знать о процентах. Но так сложилось, что дробь $\frac{1}{100}$ находится в выделенном положении по отношению к другим дробям — ей посвящена отдельная тема школьной программы!

Задача 53. Том Сойер предлагает кредит на 1 день со ставкой 17%, т.е. через сутки нужно будет вернуть на 17% больше, чем взял накануне. Вчера Сид одолжил у Тома 1 доллар. Какую сумму Сид должен отдать Тому сегодня? *В 1 долларе США 100 центов.*

Задача 54. **а)** Знайка сообщил Незнайке, что из 25 000 жителей Цветочного города лишь 1% считает Незнайку своим другом. Незнайка очень огорчился — всего один процент! Но Знайка успокоил его, сообщив, что 1% — это целых . . . коротышек! Сколько же коротышек считают Незнайку другом?
б) Незнайка дал интервью центральному телеканалу и число его друзей (и поклонников) выросло в 20 раз, то есть составляет теперь 20% жителей города. Сколько это коротышек?

Задача 55. Сестра съела $\frac{2}{5}$ торта, а брат — 40%. Кто съел больше?

Задача 56. Что больше: 80% или $\frac{3}{4}$? 30% или треть? $\frac{2}{3}$ или 70%? 15% или $\frac{1}{6}$?

Задача 57. Производитель выпускает кефир, содержащий $\frac{1}{40}$ долю жира. На упаковке принято указывать жирность в процентах. Что следует там написать?

$\boxed{\to}$ **Пример 5.** Сколько граммов жира содержится в 200 г сметаны жирностью 15%?

Решение. **Способ 1.** Поскольку процент — это 1/100, то в 100 г сметаны содержится 15 г жира. А в 200 г жира вдвое больше, то есть 30 г.

Способ 2. Найдём сначала 1% от 200 г. По определению процент — это одна сотая, то есть $200 : 100 = 2$ г. Пятнадцать процентов весят в 15 раз больше, то есть $15 \cdot 2 = 30$ г.
Ответ. 30 г.

$\boxed{?}$ **Вопрос 8.** Какой из способов решения примера 5 вам больше нравится? Какие преимущества и недостатки вы видите у каждого способа?

Задача 58. У Полины есть дисконтная карта её любимого магазина на скидку 10%. Во сколько обойдётся Полине **а)** шарф стоимостью 800 р.; **б)** пальто стоимостью 9900 р.;
в) сколько стоят сапоги, если Полина заплатила за них 9900 рублей?
г) сколько стоят перчатки, если Полина заплатила за них 2178 рублей?

Задача 59. Чипполлино прошёл 40% пути за 2 часа. Какую часть пути он проходит за час? За какое время он проходит 10% пути? А весь путь?

Задача 60. У Альбины есть дисконтная карта на скидку в её любимом магазине.
а) Каков текущий размер скидки, если за товар ценой 1200 руб. она заплатила 1020 руб.?
б) Сколько стоил товар, если Альбина заплатила 1700 рублей?

Задача 61. **а)** На упаковке печенья написано, что в одной 50-граммовой порции, состоящей из 4 печений, содержится 9% рекомендуемой суточной нормы потребления энергии. Сколько нужно съесть печений, чтобы выполнить эту суточную норму?
б) В упаковке 250 г печенья. Сколько нужно купить упаковок, чтобы выполнить эту рекомендуемую суточную норму?

Задача 62. Говорят, что в хоккее в среднем забивают около 30% буллитов.
а) В сезоне 2011/2012 Илья Ковальчук реализовал 11 буллитов из 14 попыток, а в сезоне 2005/2006 Юсси Йокинен реализовал 10 буллитов из 13 попыток. Улучшил ли Ковальчук результат Юсси Йокинена? Какой примерно процент реализации был в каждом случае?
б) По состоянию на декабрь 2017-го года Александр Овечкин забил в НХЛ 30 буллитов из 98 попыток. Был ли при этом его процент реализации выше или ниже среднего, указанного в начале условия задачи?

Задача 63. **а)** Незнайка говорит, что в классе 30 ребят и ровно 25% из них — девочки. Стоит ли ему доверять? Сколько учеников может быть в классе, если предположить, что Незнайка обсчитался не более чем на 3 человека, а процент девочек назвал верно?
б) Незнайка попытался исправиться: заявил, что в его классе 10 девочек и что они составляют ровно треть класса. Может ли так быть?
в) Незнайка перешёл в новую школу и объявил, что в новом классе ровно 10 девочек и они составляют 30% класса. Всё ли в порядке?

Задача 64. На упаковке сока написано, что 100 г содержат 16% суточной нормы потребления витамина C. Сколько сока нужно выпить, чтобы в точности выполнить норму?

Задача 65. Банк предлагает акцию: подарите банку 50% денег с вашего счёта, и тогда банк увеличит сумму на вашем счёте на 80%. Стоит ли участвовать?

Задача 66. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

Задача 67. Что больше: 17% от 19 миллионов или 19% от 17 миллионов?

Задача 68. Волшебная палочка предлагает три пакета услуг. Одним взмахом увеличить ваше благосостояние на 50%, либо двумя взмахами увеличить: первый раз на 10%, второй — на 40% (от того, что получилось), либо наоборот: первый раз на 40%, второй — на 10%. Какой пакет услуг выгоднее, если других способов повышать благосостояние у вас нет?

Задача 69.
а) Шуба дороже пальто на 100%. На сколько процентов пальто дешевле шубы?
б) Куртка дороже пиджака на 60%. На сколько процентов пиджак дешевле куртки?
в) Пальто дороже куртки на 150%. На сколько процентов куртка дешевле пиджака?
г) Пиджак дороже брюк на 25%. На сколько процентов брюки дешевле пиджака?

Задача 70. Цена на товар была
а) повышена на 25%; **б)** снижена на 80%; **в)** повышена на 50%.
На сколько процентов надо теперь её изменить, чтобы получить первоначальную цену?

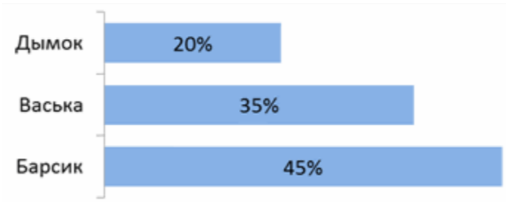
Задача 71. Агент предлагает вам УНИКАЛЬНУЮ ОПЦИЮ: уменьшить длину прямоугольного участка, который вы планировали купить, на 30% в замен на увеличение ширины на целых 40%. Цену обещает оставить неизменной. Выгодно ли предложение?

Задача 72. В голосовании приняли участие 60% жителей страны, имеющих право голоса. Известно, что право голоса имеют 83% населения страны. Сколько процентов от населения страны приняли участие в голосовании?

Задача 73. В голосовании приняли участие 40% жителей страны. Из них за президента проголосовали 95%. Сколько процентов населения реально поддерживают президента?

Задача 74. Ровно 28% класса ходит на кружок. Какая доля учеников ходит на этот кружок? Сколько, самое меньшее, может быть учеников в классе?

Задача 75*. В одном из сообществ одной социальной сети шло голосование: какой из котят на фото самый симпатичный. К утру голоса распределились так, как показано на рисунке справа. К вечеру голосов прибавилось, но все новые голоса были за Барсика. В результате у Дымка осталось только 16% голосов. Сколько процентов голосов стало вечером у Васьки?



Задача 76*. Положительное число округлили до ближайшего целого, и получили число, большее исходного на 28%. Чему могло быть равно исходное число? [3, Д5.6]

Задача 77*. На Цветочный город обрушилась эпидемия сонной болезни. Доктор Пилюлькин объявил, какое лекарство нужно принимать, чтобы не заснуть на месяц. После эпидемии стало известно следующее:

- 90% не уснувших следовали совету и принимали лекарство,
- 90% не принимавших лекарство — уснули.

Незнайка сделал вывод, что принимать лекарство было полезно: из написанного выше следует, что среди принимавших лекарство доля заснувших меньше, чем среди не принимавших. Объясните, прав Незнайка или не прав.

1.2 Логика

Для занятий по логике может быть полезна книга [6].

1.2.1 Что такое «контрпример»? Все и некоторые

Знаете ли вы, что такое «**контрпример**»? Сейчас объясним. Допустим, на заборе написано:

Каждый семиклассник знает, что такое контрпример.

Согласны ли вы с этим утверждением? Нет? Если вы — семиклассник и не знаете, что такое контрпример, то **вы как раз и являетесь контрпримером к этому утверждению**!

$\boxed{\to}$ **Пример 6.** Приведём теперь пример из арифметики. Однажды Незнайка заявил:

$\boxed{\text{Произведение двух двузначных чисел всегда четырёхзначно!}}$

и в качестве подтверждения добавил:
«Например, $32 \cdot 50 = 16 \cdot 100 = 1600$, а $99 \cdot 11 = 990 + 99 = 1089$!».
Убеждает ли вас Незнайкино «подтверждение»? Верно ли его заявление?

Незнайка вспомнил, что утром покупал 10 пачек мороженого по 85 рублей за пачку, и заплатил всего 850 рублей. Это воспоминание обрушило все его «подтверждающие примеры»: как сказать «всегда четырёхзначно», если утром было трёхзначно!

Равенство «$10 \cdot 85 = 850$» является *контрпримером* к утверждению «*Произведение двух двузначных чисел всегда четырёхзначно*», т.к. оно показывает, что *иногда* такое произведение не четырёхзначное, а, например, трёхзначное.

Ответ. Утверждение Незнайки неверно (и, тем более, его «подтверждение» нас не убеждает).

$\boxed{\to}$ **Пример 7.** Осознав ошибку, Незнайка сказал:

$\boxed{\text{Произведение двух двузначных чисел либо трёхзначно, либо четырёхзначно}}$

и добавил: «Ведь $15 \cdot 16 = 30 \cdot 8 = 240$, а $64 \cdot 16 = 32 \cdot 32 = 1024$!».
Верно ли теперь Незнайкино заявление? А его новое «подтверждение»?

Воспоминание о покупке мороженого указало Незнайке на неправильность его утверждения, но пока не научило его правильно обосновывать свои утверждения. Что будет толку в его примерах («$15 \cdot 16 = 30 \cdot 8 = 240$» и «$64 \cdot 16 = 32 \cdot 32 = 1024$»), если кто-нибудь придумает всего один *контрпример*, в котором результат будет не трёхзначным и не четырёхзначным?

Чтобы обосновать Незнайкино утверждение, нужно *доказать*, что оно верно, т.е. что контрпримера к нему не существует. Есть разные способы доказательства.

$\boxed{\mathcal{M}}$ *Способ 1:* **перебор**. Если вычислить *все* произведения двух двузначных чисел и для каждого проверить, сколько цифр у произведения, то мы либо найдём контрпример, либо докажем, что контрпримера нет, т.е. утверждение верно. Однако таких произведений много...

$\boxed{?}$ **Вопрос 9.** Кстати, сколько пришлось бы вычислить произведений, чтобы проверить Незнайкино утверждение методом перебора?

$\boxed{\mathcal{M}}$ *Способ 2: оценка.* **Оценим** возможную величину произведения двух двузначных чисел. Ясно, что самое маленькое произведение получится в случае $10 \cdot 10 = 100$, а самое большое в случае $99 \cdot 99 = (100-1)(100-1) = 10000 - 100 - 100 + 1 = 9801$. Между 100 и 9801 есть только трёхзначные и четырёхзначные числа, значит, все произведения будут иметь только 3 или 4 знака. Утверждение доказано!

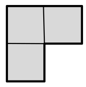
Ответ. Заявление Незнайки верно, но его «подтверждение» не является доказательством.

Замечание 5. В следующих задачах есть слова «постарайтесь доказать». Однако в ряде случаев ребятам может не хватать алгебраической подготовки и / или опыта абстрактных рассуждений. На усмотрение учителя вполне можно оставлять строгие доказательства на потом. Главное сейчас — начать говорить о необходимости доказательств и учиться отличать настоящие доказательства от рассуждений вроде «дважды сошлось, значит, всегда сойдётся».

Задача 78. Проверьте, какие из следующих утверждений верны, а какие — нет. Опровергните неверные утверждения, а верные — постарайтесь доказать.
а) Сумма двух двузначных чисел всегда двузначна.
б) Сумма двух нецелых чисел — всегда нецелое число.
в) Некоторые пары нецелых чисел имеют целочисленное произведение.
г) Все положительные обыкновенные дроби уменьшаются, если их знаменатель увеличивают, а числитель оставляют неизменным.
д) Сумма двух десятичных дробей, у каждой из которых один знак после запятой, не может иметь два знака после запятой.
е) Сумма двух десятичных дробей, у каждой из которых два знака после запятой, не может иметь только один знак после запятой.
ж) Произведение двух десятичных дробей, у каждой из которых один знак после запятой, не может иметь один знак после запятой.
з) Произведение нецелой десятичной дроби и нечётного числа — всегда нецелое число.
и) Сумма трёх несократимых дробей с различными знаменателями не может быть 1.
к*) Сумма трёх несократимых дробей с различными числителями и различными знаменателями не может быть равна 1.

Задача 79. Проверьте, какие из следующих утверждений верны, а какие — нет. Опровергните неверные утверждения, а верные — постарайтесь доказать.
а) Сумма двух чётных чисел всегда чётна.
б) Сумма чётного и нечётного числа всегда нечётна.
в) Сумма двух последовательных натуральных чисел не может быть равна 45.
г) Сумма двух последовательных натуральных чисел не может быть равна 46.
д) Все чётные числа делятся на 2.
е) Некоторые чётные числа делятся на 2.
ж) Все нечётные числа делятся на 3.
з) Некоторые нечётные числа делятся на 3.
и) Некоторые трёхзначные числа делятся на 37.

Задача 80. Проверьте, какие из следующих утверждений верны, а какие — нет. Опровергните неверные утверждения, а верные — постарайтесь доказать.



а) Клетчатый прямоугольник 4×6 нельзя разрезать на уголки из трёх клеток.
б) Клетчатый прямоугольник 5×5 нельзя разрезать на уголки из трёх клеток.
в) Клетчатый прямоугольник 5×9 нельзя разрезать на уголки из трёх клеток.
г) Клетчатый прямоугольник 3×7 нельзя разрезать на уголки из трёх клеток.

Задача 81. Проверьте, какие из следующих утверждений верны, а какие — нет. Опровергните неверные утверждения, а верные — постарайтесь доказать.
а) Число 12345 имеет сумму цифр 15.
б) Некоторые двузначные числа имеют сумму цифр 27.
в) Некоторые десятизначные числа имеют сумму цифр 5.
г) Все числа с суммой цифр 15 делятся на 15.
д) Все двузначные числа с суммой цифр 9 делятся на 9.
е) Все числа, делящиеся на 9, имеют сумму цифр 9.
ж) Все натуральные числа с суммой цифр 27 делятся на 27.

1.2.2 Логика: если – то, $\Rightarrow$ и $\Leftrightarrow$. Признаки делимости

Значком $\Rightarrow$ в математике обозначается следствие. Например, вместо «если число двузначное, то оно меньше 100» можно написать $\boxed{\text{число двузначное}} \Rightarrow \boxed{\text{число меньше 100}}$.

Ко всякому утверждению типа «если…, то…» можно сформулировать *обратное*, поменяв местами *посылку* (то, что стоит после «если») и *следствие* (стоящее после «то»). Иными словами, направив стрелочку в противоположную сторону.

Например, обратным утверждением к нашему примеру будет: «если число меньше 100, то оно двузначное». Как вы понимаете, это неверно, потому что, например, число 8 меньше 100, но оно не двузначное. Можно записать: $\boxed{\text{число меньше 100}} \not\Rightarrow \boxed{\text{число двузначное}}$.

Бывает, что верно и *прямое* (данное) утверждение, и обратное к нему. Например, утверждения «$x = 0{,}1 \Rightarrow 10x = 1$» и «$10x = 1 \Rightarrow x = 0{,}1$» оба верны. В таких случаях говорят, что посылка и следствие *равносильны* и используют значок $\Leftrightarrow$: $x = 0{,}1 \Leftrightarrow 10x = 1$.

Мы пока не будем углубляться во множество вопросов, связанных со следствиями и равносильностями, лишь научимся различать прямое и обратное утверждения, посылку и следствие, а также опровергать утверждения с помощью контрпримера и доказывать признаки делимости. Желающим глубже вникнуть в логику рекомендуем книгу [6].

Задача 82. [6] Перед перекрёстком папа остановил машину. «У нас мотор сломался!» — испуганно закричал Ваня. «С чего ты взял?» — удивился папа. «Но ты же сам говорил, что если мотор сломался, то машина не едет», — объяснил Ваня. Правильно ли он рассуждал?

Задача 83. Какие из следующих утверждений верны? Обоснуйте своё мнение.

а) Если в коридорах школы нет учеников, то наступили каникулы.

б) Если в коридорах школы нет учеников, то они на уроках.

в) Если небо безоблачно, то дождь не идёт.

г) Если небо безоблачно, то дождь сегодня не пойдёт.

д) Если небо затянуто облаками, то сегодня пойдёт дождь.

Задача 84. Какие из следующих утверждений верны? Обоснуйте своё мнение.

а) Если числитель положительной дроби меньше знаменателя, то дробь меньше 1.

б) Если треть числа — целое число, то и само число целое.

в) Если две трети числа — целое число, то и само число целое.

г) Если площадь одного клетчатого прямоугольника меньше площади другого, то первый прямоугольник можно расположить внутри второго.

д) Если число умножить на себя, то результат будет больше, чем исходное число.

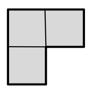
е) Если положительное число умножить на себя, то получится число больше исходного.

ж) Если периметр одного квадрата больше периметра второго, то и площадь первого квадрата больше площади второго.

з) Если периметр одного прямоугольника больше периметра другого прямоугольника, то и площадь первого прямоугольника больше площади второго.

и) Если в положительной десятичной дроби передвинуть запятую на 1 знак влево, то она уменьшится в 10 раз.

к) Если клетчатый прямоугольник можно разрезать на уголки из трёх клеток, то хотя бы одна из его сторон делится на 3.



л) Если клетчатый прямоугольник можно разрезать на уголки из трёх клеток, то хотя бы одна из его сторон делится на 6.

Задача 85. Укажите, какие из следующих утверждений про *целые числа* верны, а какие — нет. Обоснуйте своё мнение.
а) Если число делится на 2, то оно делится и на 4.
б) Если число делится на 4, то оно делится и на 2.
в) Если число делится на 6, то оно делится и на 3.
г) Если каждое слагаемое делится на 3, то и сумма делится на 3.
д) Если сумма нескольких слагаемых делится на 3, то и каждое слагаемое делится на 3.
е) Если хотя бы одно из двух чисел делится на 3, то их произведение делится на 3.
ж) Если произведение двух чисел делится на 3, то каждое из чисел делится на 3.
з) Если произведение двух чисел делится на 3, то хотя бы одно из чисел делится на 3.
и) Если произведение двух чисел делится на 4, то хотя бы одно из чисел делится на 4.

Задача 86. Коля гуляет по лагерю и предлагает всем встречным сыграть в следующую игру. Встречный и Коля пишут на бумажке по натуральному числу. Потом показывают друг другу свои бумажки и вычисляют произведение. Если оно чётно, Коля даёт встречному щелбан, иначе — конфету. Много ли конфет вы бы проиграли на месте Коли?

Пример 8. Расставьте стрелочки $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ между утверждениями про целое число N: $\boxed{N \text{ делится на } 2}$, $\boxed{N \text{ делится на } 4}$, $\boxed{N \text{ оканчивается на } 36}$, $\boxed{N \text{ делится на } 6}$.

Решение. Первое утверждение просто означает, что число чётно. Не всякое чётное число делится на 4 (например, чётное число 10 на 4 не делится). Зато число, которое можно нацело разделить на 4, обязательно делится на 2. Просто при делении на 2 частное получится вдвое больше, чем при делении на 4. Иными словами, $\frac{N}{2} = 2 \cdot \frac{N}{4}$.

Итак, $\boxed{N \text{ делится на } 4} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2}$, но не наоборот.

Посмотрим на третье утверждение. Число 120, например, делится на 2, 4, 6, но на 36 не оканчивается, поэтому третье утверждение не вытекает ни из одного из остальных. Число 136 оканчивается на 36, но на 6 не делится ($136 = 6 \cdot 22 + 4$, т.е. остаток от деления 136 на 6 равен 4). Значит, между третьим и четвёртым утверждением никаких следствий поставить нельзя. Зато числа 36, 136, 236, 336 и т.д. чётны и, кроме того, делятся на 4.

Докажем, что любое число, оканчивающееся на 36, делится на 4.

Пусть дано любое натуральное число, оканчивающееся на 36. Вычтем из него 36 — получим число, оканчивающееся на два нуля. Это число состоит из целого числа сотен, например $536 - 36 = 500 = 5 \cdot 100 =$ пять сотен, $1836 - 36 = 1800 = 18 \cdot 100 =$18 сотен. Каждая сотня состоит из 25 четвёрок, то есть делится на 4. Значит и целое число сотен делится на 4, а вместе с ним и наше число, уменьшенное на 36. Но и 36 делится на 4, поэтому прибавление 36 не испортит делимость на 4. Например, $536 = 36 + 5 \cdot 100 = 9 \cdot 4 + 5 \cdot 25 \cdot 4 = (9 + 5 \cdot 25) \cdot 4$, $1836 = 36 + 18 \cdot 100 = 9 \cdot 4 + 18 \cdot 25 \cdot 4 = (9 + 18 \cdot 25) \cdot 4$.

Осталось разобраться с последним утверждением: $\boxed{N \text{ делится на } 6}$. Понятно, что на 6 могут делиться только чётные числа (доказательство аналогично доказательству следствия $\boxed{N \text{ делится на } 4} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2}$). Поэтому $\boxed{N \text{ делится на } 6} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2}$. Но не наоборот (контрпример: 10), а также неверны стрелки $\boxed{N \text{ делится на } 6} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 4}$ (контрпример: 18) и $\boxed{N \text{ делится на } 4} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 6}$ (контрпример: 8). Связи с третьим утверждением мы уже проверяли.

Итак, мы доказали, что

$$\boxed{N \text{ оканчивается на } 36} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 4} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2} \Leftarrow \boxed{N \text{ делится на } 6}.$$

кроме того, как видно из нашей схемы, $\boxed{N \text{ оканчивается на } 36} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2}$, но больше между этими утверждениями верных следствий поставить нельзя.

Ответ. $\boxed{N \text{ оканчивается на } 36} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 4} \Rightarrow \boxed{N \text{ делится на } 2} \Leftarrow \boxed{N \text{ делится на } 6}$.

Замечание 6. Разбирая решение примера 8, мы доказали, что число, оканчивающееся на 36, делится на 4. Это частный случай известного признака делимости на 4:

$\boxed{\text{данное число делится на 4}} \Leftrightarrow \boxed{\text{число, образованное последними двумя цифрами в десятичной записи данного числа, делится на 4}}$

Задача 87. Укажите, какие из следующих утверждений верны, а какие — нет. Опровергните неверные утверждения с помощью *контрпримера*, а верные утверждения докажите.
а) Если число оканчивается на 4, то оно делится на 4.
б) Если число оканчивается на 5, то оно делится на 5.
в) Если число делится на 5, то оно оканчивается на 5.
г) Если число оканчивается на 24, то оно делится на 4.
д) Если число оканчивается на 5, то оно делится на 5.
е) Если число оканчивается на 7, то оно не делится на 6.

Задача 88. Докажите признак делимости на 4 из замечания 6, а также сформулируйте и докажите аналогичные признаки делимости на
а) 2; **б)** 8; **в)** 5; **г)** 25; **д)** 125.

Задача 89. Расставьте стрелочки $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ между утверждениями про целое число N:
$\boxed{N \text{ делится на } 24}$, $\boxed{N \text{ делится на 6 и на } 4}$, $\boxed{N \text{ делится на } 12}$, $\boxed{N \text{ делится на } 9}$.

Задача 90. Помощник кассира перепутал третью справа цифру цены товара. Насколько дешевле, самое большее, он мог продать товар?

Задача 91. Первую и третью (считая слева) цифры пятизначного числа увеличили на 1, а вторую и четвёртую — уменьшили на 1. На сколько могло измениться число?

Задача 92. **а)** Можно ли в каком-то числе, делящемся на 18, изменить одну цифру так, чтобы оно по-прежнему делилось на 18?
б) Тот же вопрос про число, делящееся на 19.

Задача 93. **а)** В числе одну цифру уменьшили на 1, а другую увеличили на 1. На сколько при этом могло измениться число? А его сумма цифр? Укажите все возможности.
б) Можно ли операциями из (**а**) число 2019 превратить в число 1812? А 2019 в 1242?
в) Какое наибольшее число можно получить из числа 2019, применяя операции из (**а**)?
г) Тот же вопрос, что и в предыдущем пункте, но про число 123456789.
д) Число X операциями из (**а**) превратили в 999600. Делилось ли число X на 9? А на 3?
е) Докажите, что каждое число операциями из (**а**) можно привести к виду $9\ldots9?0\ldots0$, где «?» обозначает какую-то одну цифру.
ж) В каком случае число $9\ldots9?0\ldots0$ делится на 9? А на 3?

Задача 94. **а)** Докажите, что разность между натуральным числом и его суммой цифр всегда делится на 9.
б) Докажите признаки делимости на 3 и на 9:

$\boxed{\text{данное число делится на 3}} \Leftrightarrow \boxed{\text{сумма цифр данного числа делится на 3}}$

$\boxed{\text{данное число делится на 9}} \Leftrightarrow \boxed{\text{сумма цифр данного числа делится на 9}}$

Задача 95*. В пятизначном числе переставили местами некоторые цифры. Могло ли оно **а)** увеличиться на 1863? **б)** уменьшиться на 12345?

Задача 96*. Делится ли число $11\ldots11$ (81 единица) на 81?

Задача 97. Расставьте $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ между утверждениями про действительное число x:
$\boxed{\text{число } x \text{ отрицательно}}$, $\boxed{x \text{ меньше } -1}$, $\boxed{\text{квадрат числа } x \text{ больше } 1}$, $\boxed{\text{число } x \text{ меньше } -2}$.

Иногда схема из следствий и равносильностей помогает решить задачу.

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 9.** В комнате 12 человек; некоторые из них честные, то есть всегда говорят правду, остальные всегда лгут. «Здесь нет ни одного честного человека», — сказал первый. «Здесь не более одного честного человека», — сказал второй. Третий сказал, что честных не более двух, четвёртый — что не более трёх, и так далее до двенадцатого, который сказал, что честных людей не более одиннадцати. Сколько честных людей в комнате на самом деле?

Решение. Заметим, что каждое утверждение вытекает из предыдущего:

$\boxed{\text{нет ни одного честного}} \Rightarrow \boxed{\text{не более одного честного}} \Rightarrow \boxed{\text{честных не более двух}} \Rightarrow \ldots$

Значит, если некоторое утверждение верно, то верны и все последущие. И если человек честный, то все говорившие после него — честные.

Посмотрим на шестого человека. Если он говорит правду, то он честен и все с 7-го по 12-го — честные, то есть всего целых семь честных. Но шестой говорит, что честных не более пяти, значит, шестой лжет.

Пусть седьмой честен, тогда честных шесть человек (№7–№12), и седьмой как раз и говорит, что честных не более шести — то есть седьмой *может быть* честным.

Может ли седьмой быть лгуном? Если бы он солгал, то честных было бы максимум пять (№8–№12), то есть никак не больше шести, а значит утверждение седьмого было бы верно, что противоречит предположению, что он лгун.

Итак, честных шестеро: с седьмого по двенадцатого выступавшего.

Ответ. Шесть.

Задача 98. Однажды на лестнице была найдена странная тетрадь. В ней было записано сто утверждений:

«В этой тетради ровно одно неверное утверждение»;

«В этой тетради ровно два неверных утверждения»;

«В этой тетради ровно три неверных утверждения»;

...

«В этой тетради ровно сто неверных утверждений».

Есть ли среди этих утверждений верные, и если да, то какие?

Задача 99*. В упаковке несколько ручек. Учителя часто раздают по одной ручке всему классу. На наши вопросы они сообщили следующее.

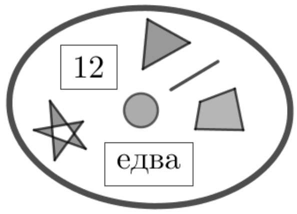
Светлана Николаевна: две упаковки легко хватает на 33 семиклассников;
Юлия Владимировна: на группу из 19 человек одной упаковки точно мало;
Елена Ивановна: три упаковки хватает на класс из 35;
Алексей Сергеевич: а мне две упаковки на 25 человек хватило;
Дмитрий Владимирович: во всяком случае, 100 упаковок на 1000 человек — достаточно.

Позже оказалось, что трое учителей сообщили верные сведения, а двое что-то перепутали. Сколько ручек в упаковке?

1.3 Множества

Множество — одно из основных понятий в математике. Нам предстоит очень часто встречаться с разными примерами множеств, поэтому сейчас мы рассмотрим простейшие примеры и научимся пользоваться основными терминами, связанными с этой темой.

Множество — это *любой* набор (совокупность, коллекция). Внутри множества может не быть никакой специальной структуры или «логики». Просто воображаемый мешок с какими-то объектами. Например, можно рассмотреть:



- множество всех людей, когда-либо родившихся на нашей планете;
- множество учеников вашего класса;
- множество синих автомобилей, находящихся сейчас в Москве;
- множество, состоящее из четырёх чисел 5, 7, 12 и -150;
- множество всех отрицательных чисел;
- множество всех трёхзначных чисел, делящихся и на 101, и на 17;
- множество всех поездов, выезжающих 30 октября 2020 года из Москвы в Петербург;
- множество, состоящее из слова «едва», числа 12 и картинки, изображённой справа.

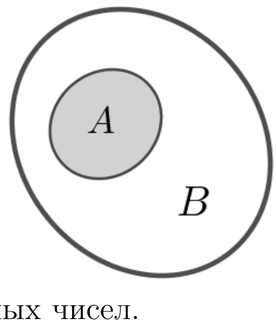
Множество состоит из своих *элементов*. Про некоторый элемент можно сказать, что он *принадлежит* или *не принадлежит* данному множеству. А данное множество, в свою очередь, *содержит* или *не содержит* данный элемент.

Например, число 12 является элементом четвёртого и последнего множеств из списка выше. А первое множество содержит Вас, уважаемый читатель, в качестве одного из своих элементов.

? **Вопрос 10.** Каким из множеств в списке выше принадлежит число -150?

Множества бывают *конечные* и *бесконечные*, в зависимости от количества элементов. Например, множество дней недели — конечное, оно содержит 7 элементов. А множество всех точек на плоскости бесконечно.

? **Вопрос 11.** Какие из множеств в списке выше бесконечны? Можно ли определить, сколько элементов содержат остальные?



Иногда бывает, что одно множество *содержится* в другом. А именно, если все элементы множества A принадлежат множеству B, то множество A содержится в множестве B, множество B *включает* (*содержит*) A, или, по-другому: A является *подмножеством* множества B.

Например, множество всех людей содержит в себе в качестве подмножества множество всех людей, владеющих русским языком. А множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел.

Нам осталось обсудить последний термин — *пустое множество*. Это множество, не содержащее ни одного элемента. Его можно представлять как пустой мешок. Вы увидите, что этот немного странный термин нам пригодится.

? **Вопрос 12.** Какое из множеств в списке выше — пустое?

Задача 100. Приведите примеры **а)** пятиэлементного множества; **б)** бесконечного множества; **в)** двух множеств, одно из которых содержится в другом;
г) двух множеств, имеющих общие элементы, но не содержащихся друг в друге.

Задача 101. Юный лингвист изучает три подмножества слов русского языка:
A: множество слов, содержащих букву «е»;
B_1: множество слов, состоящих из одного слога;
B_2: множество слов, состоящих из двух слогов;
C: множество слов, состоящих из 7 букв.
а) Существуют ли общие элементы у множеств A и B_1?
б) Существуют ли общие элементы у множеств A и C?
в) Существуют ли общие элементы у множеств B_1 и B_2?
г) Содержатся ли какие-нибудь из множеств A, B_2, C друг в друге? (Не забудьте аккуратно обосновать свой ответ!)
д) Существуют ли общие элементы у множеств B_2 и C?
е*) Существует ли слово, принадлежащее всем трём множествам A, B_2 и C?
ж*) Существуют ли общие элементы у множеств B_1 и C?
з*) Существует ли слово, принадлежащее всем трём множествам A, B_1 и C?

Задача 102. Обозначим через A множество всех целых чисел, делящихся на 2, через B — множество всех целых чисел, делящихся на 3, а через C — множество всех целых чисел, делящихся на 6. Ответьте на следующие вопросы.
а) Является ли число 51 элементом множества A?
б) Является ли число 51 элементом множества B?
в) Верно ли, что все элементы множества C принадлежат множеству A?
г) Верно ли, что все элементы множества A принадлежат множеству C?
д) Число x не принадлежит множеству B. Может ли x принадлежать множеству C?
е) Известно, что некоторое число принадлежит и множеству A, и множеству B. Обязательно ли оно принадлежит множеству C?

Задача 103. **а)** Выберем среди чётных чисел те, которые делятся на 7, и обведём каждое из них в кружок. Теперь рассмотрим множество всех чисел, делящихся на 7, найдём среди них все чётные и выделим зелёным маркером. Вопросы: все ли зелёные числа обведены в кружок? Все ли обведённые числа — зелёные?
б) Выберем среди всех мужчин тех, у кого есть младшая сестра, и подарим каждому такому мужчине скафандр. Теперь рассмотрим всех людей, которые хоть для кого-то являются старшими братьями, и выберем среди них тех, у кого есть сестра. И отправим этих «выбранных» людей на Луну. Вопросы: останется ли при этом на Земле кто-то из тех, кому мы дарили скафандр? Отправляем ли мы на Луну кого-то, кому скафандр не дарили?

Задача 104. [9, стр. 146, №1] Множество A состоит из целых чисел, делящихся на 4, множество B — из целых чисел, делящихся на 10, и множество C из целых чисел, делящихся на 75. Опишите все числа, которые входят во все три множества.

Задача 105. Кого больше: бадминтонистов, занимающихся шахматами, или шахматистов, занимающихся бадминтоном?

Задача 106. [6, 2.3] Означают ли одно и то же высказывания:
а) «Некоторые сантехники любят рэп» и «Некоторые любители рэпа — сантехники»?
б) «Все сантехники любят рэп» и «Все любители рэпа — сантехники»?

Задача 107. Старейший математик среди шахматистов и старейший шахматист среди математиков — это один или тот же человек или (возможно) разные?

Задача 108. Лучший математик среди шахматистов и лучший шахматист среди математиков — это один или тот же человек или (возможно) разные?

Задача 109. Каждый десятый математик — шахматист, а каждый шестой шахматист — математик. Кого больше — математиков или шахматистов — и во сколько раз?[2]

[2]Серия из трёх задач 107–109 позаимствована из книги [8]. Пожалуй, вся остальная часть этой книги пока

Задача 110. Ученики решали две задачи. В конце занятия учитель составил четыре списка:
1-й список: решившие первую задачу;
2-й список: решившие только одну задачу;
3-й список: решившие по меньшей мере одну задачу;
4-й список: решившие обе задачи.
а) Какой из списков самый длинный?
б) Могут ли два списка совпадать? Если да, то какие?

Задача 111. У папуаса, не умеющего считать, есть мешок кокосовых орехов. Путешественник Джеймс Кук предлагает ему обменять этот мешок на коробок спичек, утверждая, что спичек в коробке больше, чем кокосов в мешке. Как папуасу проверить, не обманывает ли его Кук?

Задача 112. Секция художественной гимнастики открыла набор девочек 2015 года рождения. На экзамен каждая девочка пришла с мамой, а взрослых без детей в здание не пускали.
а) Могло ли число мам на экзамене быть больше, чем число поступающих девочек?
б) Могло ли число поступающих девочек на экзамене быть больше, чем число их мам?

Задача 113. Художник Худобеднов за месяц работы написал 42 картины. На 17 из них есть лес, на 29 — река, а на 13 — и то, и другое; на остальных картинах — не пойми что. Сколько картин изображают не пойми что?

Задача 114. В классе все увлекаются химией или физикой. Сколько человек в классе, если химией увлекаются 20 человек, физикой — 15, а и тем, и другим — 10?

Задача 115. В 1«Ю» классе 27 учеников. Учительница попросила их написать в тетради свои имена — сначала правой рукой, а потом — левой. Оказалось, что с первым заданием справились 24 первоклассника, со вторым — 8. Сколько учеников 1«Ю» умеют писать своё имя обеими руками?

Задача 116. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих 1000, которые делятся на 3? На 5? На 15? Не делятся ни на 3, ни на 5?

Замечание 7. Последние четыре задачи удобно решать с помощью так называемых кругов Эйлера, хотя можно было обойтись и без них. Мы проиллюстрируем этот метод на примере 10. Возможно, он покажется вам сложным. Не огорчайтесь: пример действительно громоздкий, автор этого текста тоже устал, пока записывал его решение. Главное сейчас — понять суть и научиться решать простые задачи по этой теме. Остальное придёт с опытом.

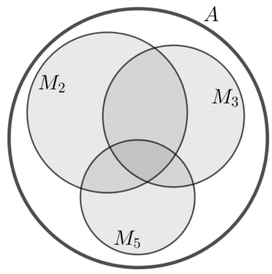
Замечание 8. Может быть, вам будет интересно прочитать сюжет «Планета мифов» на стр. 41–45 книги [9], где разбирается задача на эту тему про Йона Тихого из клуба Межгалактических путешественников.

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 10.** Сколько натуральных чисел 1 до 2020 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение. Рассмотрим множество A всех натуральных чисел от 1 до 2020 и три подмножества в нём: M_2 — делящихся на 2, M_3 — делящихся на 3 и M_5 — делящихся на 5. Нас интересует количество чисел, *не попавших* ни в одно из этих подмножеств. Поскольку мы знаем, что всего чисел 2020, достаточно посчитать, сколько чисел *содержится* в подмножествах M_2, M_3, M_5.
Каждое второе число делится на 2, так что в множестве M_2 1010 чисел.
На три делятся числа $3 = 1 \cdot 3, 6 = 2 \cdot 3, \ldots, 2019 = 673 \cdot 3$, так что в M_3 всего 673 элемента.
Наконец, каждое пятое число делится на 5, так что в M_5 будет $2020 : 5 = 404$ элемента.

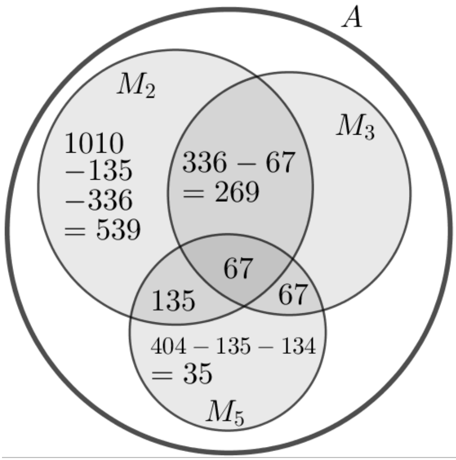
$\boxed{?}$ **Вопрос 13.** У нас всего 2020 чисел, но если сложить 1010, 673 и 404, получится больше 2020. Как же так?

слишком сложна для нас.



Конечно, дело в том, что бывают числа, делящиеся одновременно и на 2, и на 3, или на 3 и на 5, и т.д. То есть у множеств M_2, M_3, M_5 есть общие элементы. Нужно это учесть. Удобно изобразить множества в виде кругов, см. рис. справа. Такую схему часто называют *кругами Эйлера* (или *диаграммами Эйлера*).

Нам нужно определить количество элементов в белой области. Для этого последовательно посчитаем количество элементов в каждой из областей, на которые оказались разбиты множества M_2, M_3, M_5, а затем вычтем общее число оказавшихся там элементов из 2020.



Итак, начнём с центральной части нашего «цветка» — сколько чисел от 1 до 2020 делятся и на 2, и на 3, и на 5? Поскольку числа 2, 3, 5 — простые, это будут в точности числа, делящиеся на их произведение, то есть на 30. Это числа $30 = 1 \cdot 30, 60 = 2 \cdot 30, \ldots, 2010 = 67 \cdot 30$, то есть 67 чисел. Запишем это число на нашу схему.

Далее, на 2 и 3 делятся числа, делящиеся на 6, и поскольку $2020 : 6 = 336$ (ост. 4), то этих чисел 336. Причём 67 из них делятся ещё и на 5. А $336 - 67 = 269$ — не делятся. Отметим это на диаграмме.

На 2 и 5 делится 202 числа, 67 из них — ещё и на 3, запишем в схеме $202 - 67 = 135$.

На 3 и 5 делятся 134 числа, 67 из них — ещё и на 2 ($2020 : 15 = 134$ (ост. 10)).

Теперь мы готовы посчитать общее количество чисел, попавших в закрашенную область: это 673 числа, делящихся на 3, 135 чисел, делящихся на 2 и 5, но не делящихся на 3, 539 чисел, делящихся на 2, но не на 3 и не на 5, и 35 чисел, делящихся на 5, но не на 2 и не на 3. Итого $673 + 135 + 539 + 35 = 170 + 1212 = 1382$. Значит, искомое количество чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5, равно $2020 - 1382 = 638$.

Ответ. 638.

Задача 117. Сколько от 1 до 1000 чисел, не делящихся на 5? Делящихся на 7? Делящихся на 7 и не делящихся на 5?

Задача 118. Сколько от 1 до 2020 чисел, не делящихся ни на 4, ни на 5?

Задача 119. Большая группа туристов выехала в заграничное турне. Из них английским языком владеет 28 человек, французским — 13, немецким — 10, английским и французским — 8, французским и немецким — 5, английским и немецким — 6, всеми тремя языками — 2, а 41 человек не владеет ни одним из трёх языков. Сколько всего туристов?

Задача 120*. Предлагаем познакомиться с одним из парадоксов теории множеств. Для этого разберитесь в такой ситуации. Одному солдату приказали брить тех и только тех солдат его взвода, которые не бреются сами. Как ему поступать с самим собой? Подробнее см. [9].

Задача 121*. [9, стр. 44] В одной из повестей Льюиса Кэрролла есть следующая задача:

«В ожесточённом бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 — одно ухо, 80 — одну руку и 85 — одну ногу. Каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?»

Задача 122*. Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 — синюю грань и 75 — зелёную грань. Сколько кубиков могут иметь грани всех трёх цветов? [3]

[3]Внимание! Вопрос вида «сколько могут» подразумевает, что нужно найти все возможные варианты и доказать, что другие варианты невозможны.

1.4 Решение текстовых задач арифметическим способом

Алгебра позволяет абстрагироваться от сюжета задачи с помощью обозначений. Можно ли удачно *абстрагироваться* от условия, если не умеешь вникать в него? Сложно понять *алгебраический язык*, если ещё не научился выражать те же мысли на обычном языке. На наш взгляд, при изучении алгебры важно не пренебрегать прочими соображениями.

Арифметическим задачам посвящена книга [10], которую может быть уместно использовать.

З Можно также использовать следующие упражнения из задачника [1]:
стр. 111 A10; **стр. 229** C2, C3.

Пример 11. Один Бездельник захотел получить денег и заключил сделку с Чёртом. Теперь каждый раз, когда Бездельник переходит мост через речку, количество имеющихся у него денег удваивается. Но за это он отдаёт Чёрту каждый раз по 24 копейки. Сколько денег было у Бездельника, если он прошёл по мосту 3 раза и деньги у него закончились?

Решение. **Способ 1.** Применим **анализ с конца** (**обратный ход**). Куда делись последние деньги Бездельника? Это 24 копейки, которые он отдал Чёрту. Откуда у него

24 копейки? Они получились после удвоения. Значит, до этого было 12 копеек. Что происходило перед этим? Бездельник платил за предыдущий переход моста. Значит, у него было $12 + 24 = 36$ копеек. Процесс можно записать в виде схемы

$$0 \xleftarrow{-24} 24 \xleftarrow{:2} 12 \xleftarrow{-24} 36 \xleftarrow{?} \ldots$$

Предлагаем вам довести это решение до конца самостоятельно.

Способ 2. Пусть у Бездельника в начале был один кошелёк.

Когда он перешёл мост, он получил второй такой же — два кошелька. Но отдал 24 копейки. Получается, у него стало 2 кошелька без 24 копеек.

Второй раз перешёл мост, ему дали столько же — 2 кошелька, но таких же, то есть не полных, а без 24 копеек. Всего: 4 кошелька, из которых вынуты 48 копеек. Ещё 24 коп. он уплачивает Чёрту. Получается 4 кошелька, из которых вынуты $48 + 24 = 72$ копейки.

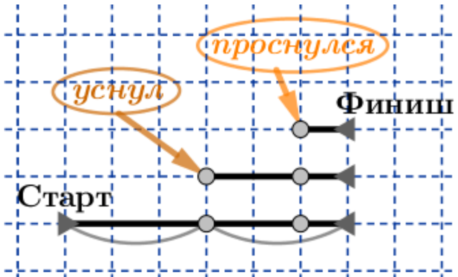
Третий раз перешёл мост, снова ему дали столько же, сколько у него было — 4 кошелька без 72 копеек. Всего стало 8 кошельков без 144 копеек. И затем он заплатил 24 копейки. Стало 8 кошельков, из которых вынуты 168 копеек.

Раз 8 кошельков, из которых вынуты 168 коп., пусты, то в кошельке $168 : 8 = 21$ коп.

<u>**Ответ.**</u> 21 копейка.

Пример 12. Буратино сел в поезд. Проехав половину всего пути, он лёг спать и спал до тех пор, пока не осталось проехать половину того пути, который он проспал. Какую часть всего пути Буратино проехал бодрствующим?

Решение. **Способ 1.** Весь путь в рассказе разделён на три участка. Первый участок — половина. Третий участок равен половине второго. Значит, второй длился столько же, сколько два третьих участка. Получается, второй и третий участки вместе — 3 третьих участка. Но они же составляют и половину пути (вторую половину), поэтому весь путь равен 6 третьих участков. Из этих шести участков Буратино бодрствовал первые три и последний, т.е. 4 участка из шести, или $4/6 = 2/3$ пути.

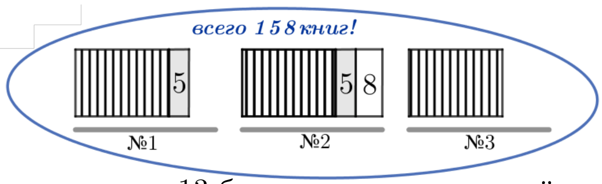


Способ 2. Изобразим путь в виде отрезка, причём **начнём рисовать его с конца**. Пусть масштаб таков, что 1 клетка — это последний участок (с момента пробуждения до конца). Спал он вдвое дольше, т.е. 2 клетки. Уснул в середине пути, значит, до сна проехал ещё 3 кл. Итак, Буратино бодрствовал 4 клетки из 6, т.е. $4/6 = 2/3$ пути.

<u>**Ответ.**</u> Две трети.

Вопрос 14. Чем отличаются два приведённых способа решения примера 12?

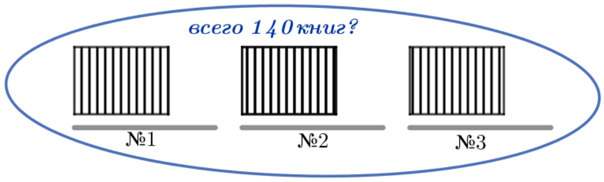
Пример 13. Можно ли расставить 158 книг на трёх полках так, чтобы на первой полке было на 8 книг меньше, чем на второй, и на 5 книг больше, чем на третьей?



Решение. Предположим, что книги расставлены.

На какой полке **меньше всего** книг? На первой меньше, чем на второй, но больше, чем на третьей... Итак, 3-я — самая «малочисленная», на 1-й — на 5 книг больше, а на 2-й — ещё на 8 больше, то есть на 13 больше, чем на третьей.

Уберём «лишние» книги с первой и второй полок так, чтобы на каждой полке стало столько же, сколько на третьей.



Сколько всего книг осталось? $158 - 5 - 13 = 140$.

Как расставлены эти 140 книг? Поровну на трёх полках. Тогда на одной полке $140 : 3$ книг, но это число нецелое, так как 140 на 3 не делится.

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, и книги указанным образом расставить нельзя.

Ответ. Нет.

Замечание 9. В решении примера 13 на полях отмечены два метода. Первый — «от противного» — начинается с *предположения* и заканчивается *противоречием*, опровергающим сделанное предположение. Второй метод называется «принципом крайнего» и рекомендует рассмотреть «крайний случай» — наименьшее число, наибольшее расстояние, ближайший город, самого высокого жирафа и т.д. Эта простая идея, как ни странно, часто оказывается решающей, хотя в нашем случае без неё можно было бы и обойтись.

Пример 14. [3, 4.4] Малыш может съесть торт за 6 минут, а Карлсон — за 3. За сколько минут они съедят торт вместе?

Решение. Скорость поедания торта Малышом равна $1/6$ торта в минуту, скорость Карл-сона равна $1/3$ торта/мин. Можно было бы продолжить решать задачу, использую эти данные, но ничто не мешает нам **сменить единицы измерения на более удобные.**

Разрежем торт на 6 кусков и будем измерять скорость поедания не в *тортах в минуту*, а в *кусках в минуту*. В новых единицах скорость Малыша равна 1 кусок/мин, скорость Карлсона — 2 куска/мин. Если они будут есть вдвоём, то за минуту будут исчезать 3 куска, а весь торт (6 кусков) будет съеден, разумеется, за 2 минуты.

Ответ. 2.

З После разбора примера 14 аналогичным способом («пересчётом в целые») можно решить следующие упражнения из задачника [1]:
стр. 146–150 A1, A2, A4, A7, A8, B4, B8–10.

Задача 123. На двух полках было 43 книги, причём на первой полке было на 15 книг больше, чем на второй.

а) Сколько книг надо отложить с первой полки в сторону, чтобы на полках осталось поровну книг?

б) Сколько книг останется после этого на двух полках вместе?

в) Сколько книг будет на каждой полке?

г) Сколько книг было на первой полке?

д) Сколько книг было на второй полке?

Задача 124. После поездки на море Саша пополнила свою коллекцию ракушек 24 новыми экземплярами, отчего размер коллекции увеличился в 3 раза. Сколько ракушек Саша должна была привезти с моря, чтобы её коллекция увеличилась в 4 раза?

Задача 125. В зоомагазине продают больших и маленьких птиц. Большая птица стоит вдвое дороже маленькой. Одна дама купила 5 больших птиц и одну маленькую, а другая — 2 маленьких и 3 больших. При этом первая дама заплатила на 300 рублей больше.
а) Сколько маленьких птиц смогла бы купить первая дама за те же деньги?
б) Сколько маленьких птиц смогла бы купить вторая дама за те же деньги?
в) Сколько маленьких птиц можно купить на 300 рублей?
г) Сколько рублей стоит маленькая птица?
д) Сколько рублей стоит большая птица?

Задача 126. Сундук, полный золота, весит 58 пудов, а сундук, заполненный золотом наполовину, весит 33 пуда.
а) Сколько пудов весит половина золота?
б) Сколько пудов весит всё золото?
в) Сколько пудов весит пустой сундук?

Задача 127. Мышь, мышонок и сыр вместе весят 140 г. Сыр весит на 50 г больше, чем мышь и мышонок вместе взятые. Мышонок весит в восемь раз меньше, чем мышь. Сколько граммов весит каждый из них?

Задача 128. На четырёх полках стояло 164 книги. Когда с первой полки сняли 16 книг, со второй переставили на третью 15, а на четвёртую поставили 12 книг, на всех полках книг оказалось поровну. Сколько книг было на каждой полке первоначально?

Задача 129. Пёс и кот одновременно схватили зубами батон колбасы с разных сторон. Если пёс откусит свою часть колбасы и убежит, коту достанется на 250 г больше, чем псу. Если кот откусит свою часть колбасы и убежит, псу достанется на 350 г больше, чем коту. Сколько граммов колбасы останется, если оба откусят свои части колбасы и убегут?

Задача 130. На лужайке росли 35 жёлтых и белых одуванчиков. После того как 8 белых облетели, а 2 жёлтых побелели, жёлтых одуванчиков стало вдвое больше, чем белых. Сколько белых и сколько жёлтых одуванчиков росло на лужайке вначале?

Задача 131. Можно ли 118 банок консервов разложить в 3 ящика так, чтобы в третьем ящике было на 9 банок больше, чем в первом, а во втором на 8 меньше, чем в третьем?

Задача 132. Выясните, какое число мог задумать каждый из ребят, если
а) Аня умножила своё число на 3 и получила 111.
б) Боря разделил своё число на 8 и получил 1,5.
в) Витя умножил своё число на 2, а затем к результату прибавил 1. Получилось 81.
г) Гриша прибавил 1, а затем результат умножил на 2. Получилось 18.
д) Дима умножил своё число на 3, прибавил 1 и вычел задуманное число. Получил 65.
е) Егор разделил своё число на 2, вычел 2, прибавил задуманное число, разделил на 2, вычел 2, прибавил задуманное число, получил 88.
ж*) Женя уменьшил своё число на 10 и результат умножил на своё число. Получил -16.
з*) Зоя увеличила своё число на 6 и результат умножила на своё число. Получила 40.

Задача 133. Если Марина купит 2 пачки мороженого, у неё останется 50 рублей, а на 3 пачки ей не хватает 25 рублей. Сколько стоит пачка мороженого?

Подсказка. Пусть Марина купила 2 пачки мороженого, и тут ей подарили 25 рублей. . .

Задача 134. [10] Для покупки восьми шоколадок Тане не хватит 40 рублей. Если она купит 5 шоколадок, то у неё останется 140 рублей. Сколько денег у Тани?

Задача 135. Ребята купили коробку леденцов, стали раздавать по 3 леденца, всё было хорошо, но последнему человеку леденцов совсем не досталось. Тогда поделили леденцы заново: раздали всем по 2 леденца, и ещё 5 леденцов оставили в коробке. Сколько было ребят и сколько леденцов в упаковке?

Подсказка. «Отберите» по 1 леденцу у ребят, чтобы дать «последнему» человеку и положить в коробку.

Задача 136. **а)** На какое число нужно уменьшить 987 и увеличить 567, чтобы получить одинаковые числа?

б) Найдите число, полусумма которого с числом 916 равна 691.

в) Найдите натуральное число, которое больше своей пятой части на 64.

г) Найдите целое число, которое на 54 больше противоположного себе числа.

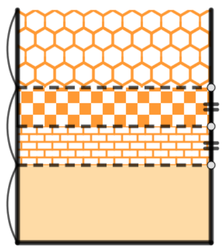
д) Какое число прибавили к числителю и знаменателю дроби $\frac{63}{95}$, если получили $\frac{1}{3}$?

Подсказка. Что **не** меняется при прибавлении одного и того же числа к числителю и знаменателю?

Ф **Задача 137.** [2, $\boxed{40}$] Задумайте число, прибавьте к нему 3, умножьте результат на 2. Отнимите задуманное число. Отнимите 4. Ещё раз отнимите задуманное число. У вас получилось 2, не так ли? Почему этот фокус всегда удаётся?

Задача 138. Взмах волшебной палочки утраивает число собранных грибов, но воспользоваться ею каждый может лишь однажды. На краю леса у Винтика и Шпунтика было поровну грибов, но Винтик не выдержал и взмахнул палочкой, а по дороге домой нашёл ещё 6 грибов. А Шпунтик по дороге домой нашёл всего 2 гриба, после чего, уже садясь в автобус, взмахнул палочкой. У кого в результате получилось больше грибов?

Задача 139. Мосметрострой нанял двух кротов рыть туннель. Первый крот работает быстрее второго, но платят обоим одинаково, учитывая только время. Что выгоднее: чтобы первую половину тоннеля выкопал один крот, а вторую — другой; или, чтобы они начали копать с двух сторон одновременно и копали бы до встречи?



Задача 140. После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков? *Решение этой задачи методом «пересчёт в целые» см. в [3, 4.9]. Другой способ подсказывает рисунок справа.*

Задача 141*. [3, Д4.6] Девять голодных школьниц за час набирают корзину клубники и наедаются досыта. Сытые школьницы клубнику не едят, поэтому набирают корзину за час вшестером. Сколько голодных школьниц наедятся досыта корзиной клубники?

Задача 142. На завтрак Карлсон съел 40% торта, а Малыш съел 150 г. На обед Фрекен Бок съела 30% остатка и ещё 120 г, а Матильда вылизала оставшиеся 90 г крошек от торта. Какой массы был торт изначально?

Задача 143*. Вчера Саша варил суп и положил мало соли, суп пришлось досаливать. Сегодня он положил соли в два раза больше, но все равно суп пришлось досаливать, правда, уже вдвое меньшим количеством соли, чем вчера. Во сколько раз Саше нужно увеличить сегодняшнюю порцию соли, чтобы завтра не пришлось досаливать? (Каждый день Саша варит одинаковые порции супа.)

1.4.1 * Арифметические задачи на движение

Все задачи в этом разделе могут быть решены без уравнений, арифметически. Алгебра кое-где тоже может оказаться полезной, но изучить и применить её мы ещё успеем…

$\boxed{\rightarrow}$ **Пример 15.** Вчера ученик шёл от дома до школы со скоростью 3 км/ч и опоздал на урок на 1 мин. Сегодня он пошёл со скоростью 4 км/ч и пришёл за 3 мин до начала урока. С какой скоростью ученику нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу урока, если он выходит из дома каждый раз в одно и то же время?

Решение. 1) Идея: отправим в школу одновременно двух учеников. «Вчерашнего» со скоростью 3 км/ч и «сегодняшнего» со скоростью 4 км/ч.

2) Кто придёт раньше и на сколько? Сегодняшний ученик придёт за 3 минуты до звонка, а вчерашний — через 1 минуту после. Значит, в течение 4 минут вчерашний будет идти, пока сегодняшний будет ждать его в классе.

3) Какое расстояние пройдёт вчерашний ученик, пока сегодняшний его ждёт? Это расстояние, пройденное со скоростью 3 км/ч за 4 минуты. Вы можете посчитать, сколько это километров (или метров…). Но нам это число не понадобится.

4) Откуда взялось это расстояние между сегодняшним и вчерашним учеником? Сегодняшний шёл быстрее на 1 км/ч, и вчерашний отстал.

5) За какое время вчерашний отстал на это расстояние? За время пути сегодняшнего, но чему оно равно? Это расстояние вчерашний проходит со скоростью 3 км/ч за дополнительные 4 минуты. Отстаёт вчерашний со скоростью 1 км/ч, то есть втрое медленнее, чем идёт. Значит, это отставание накапливалось втрое дольше, чем потом «ликвидировалось», то есть $3 \cdot 4 = 12$ минут.

6) Каково расстояние от дома до школы? Сегодняшний прошёл его за 12 минут со скоростью 4 км/ч, то есть 4 км в 60 минут. Но 12 минут в 5 раз меньше, чем 60, значит и расстояние в 5 раз меньше: $4/5$ км $= 4000/5$ м $= 800$ м.

7) Какое время между выходом и звонком? $12 + 3 = 15$ минут, так как сегодняшний шёл 12 минут и ждал 3 минуты.

8) Какова искомая «идеальная» скорость? 800 м надо пройти за 15 минут, то есть 1600 за 30 минут, или 3200 за 60 минут, иными словами, 3,2 км/ч.

Ответ. 3,2 км/ч.

Задача 144*. Разные учителя при решении примера 15 составили следующие уравнения, см. ниже. Угадайте, какие обозначения они ввели, объясните, откуда берётся уравнение и дорешайте задачу их способом. Какой способ вам кажется самым удачным?

а) $\frac{S}{3} - \frac{1}{60} = \frac{S}{4} + \frac{1}{60}$; **б)** $3\left(t + \frac{1}{60}\right) = 4\left(t - \frac{1}{20}\right)$; **в)** $3(x+1) = 4(x-3)$.

Задача 145. Студент шёл от общежития до университета со скоростью 4 км/ч и опоздал на лекцию на 5 мин. В другой раз он пошёл со скоростью 5 км/ч и пришёл за 1 мин до начала лекции. С какой скоростью студенту нужно идти в следующий раз, чтобы прийти в точности к началу, если он выходит из общежития каждый раз в одно и то же время?

Задача 146. Дорога от дома до школы занимает у Пети 20 минут. Однажды по дороге в школу он вспомнил, что забыл дома ручку. Если теперь он продолжит свой путь с той же скоростью, то придёт в школу за 3 минуты до звонка, а если вернётся домой за ручкой, то, идя с той же скоростью, опоздает к началу урока на 7 минут. Какую часть пути он прошёл до того, как вспомнил о ручке?

Задача 147. Инженер ежедневно приезжает поездом на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 часов утра и пошёл навстречу машине. Встретив машину, он сел в неё и приехал на завод на 20 минут раньше, чем обычно. Сколько времени инженер шёл пешком? Скорости автомобиля и инженера постоянны.

Задача 148. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из B в A выехал велосипедист. Через час пешеход оказался ровно посередине между пунктом A и велосипедистом. Ещё через 15 минут они встретились, и каждый продолжил свой путь. Сколько времени потратил пешеход на путь из A до B? (Скорости пешехода и велосипедиста постоянны.)

Задача 149. Вадим и Лёша спускались с горы. Вадим шёл пешком, а Лёша съезжал на лыжах в семь раз быстрее Вадима. На полпути Лёша упал, сломал лыжи и ногу и пошёл в два раза медленней Вадима. Кто первым спустится с горы?

Задача 150. Три бегуна — Антон, Серёжа и Толя — участвуют в беге на 100 м. Когда Антон финишировал, Серёжа находился в 10 метрах позади него, а когда финишировал Серёжа, Толя находился позади него в 10 метрах. На каком расстоянии друг от друга находились Толя и Антон, когда Антон финишировал? (Предполагается, что все мальчики бегут с постоянными, но, конечно, не равными скоростями.)

Задача 151*. Мальчик стоит на автобусной остановке и мёрзнет, а автобуса нет. Ему хочется пройтись до следующей остановки. Мальчик бегает вчетверо медленнее автобуса и может увидеть автобус на расстоянии 2 км. До следующей остановки ровно километр. Имеет ли смысл идти, или есть риск упустить автобус?

Задача 152*. Лена выгуливала щенка. Как только она оказалась в начале дорожки, в конце дорожки показалась её подруга Катя. Щенок от радости стал бегать от Лены к Кате и назад, и бегал несколько раз туда-сюда, пока подруги не встретились в 13 м от начала дорожки. Всего щенок пробежал 85 м. Какое расстояние он пробежал в одну сторону и какое — в другую?

Подсказка.

Рассмотрите перемещения щенка относительно точки, в которой подруги в итоге встретились.

Замечание 10. **Задачи на движение по и против течения** обычно решаются в школе с помощью уравнений, с вводом скорости течения, собственной скорости и использованием формул $v_{\text{по теч}} = v_{\text{собств}} + v_{\text{теч}}$, $v_{\text{против}} = v_{\text{собств}} - v_{\text{теч}}$. Безусловно, это важный метод. Но при этом, к сожалению, часто суть происходящего остаётся за кадром, и нередко — уравнения оказываются технически неподъёмными для школьников.

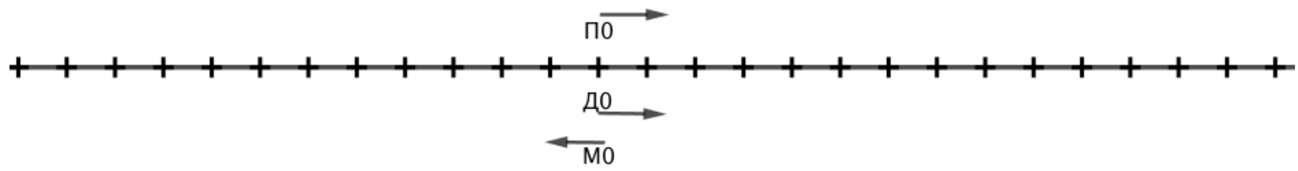
Занимательную статью про арифметические и алгебраические методы решения задач на движение, некоторые из которых приведены ниже, можно найти в [11]. Рекомендуем также книгу [10].

Задача 153. Двое малышей отбежали от мамы, стоящей посреди пустого коридора поезда, и помчались в разные стороны. Через 20 секунд их позвала мама и они побежали обратно с теми же скоростями. Кто первым вернётся: тот, кто бегает быстрее, или тот, кто бегает медленнее? На какое расстояние за время пробежки малышей мама удалится от вокзала, если поезд движется со скоростью 90 км/ч?

Задача 154*. Двое ребят одновременно прыгнули с плывущего по реке плота и поплыли в разные стороны: девочка — по течению, мальчик — против. Через 2 минуты они развернулись и вскоре вновь оказались на плоту. Кто вернулся раньше? (Каждый плыл равномерно со своей скоростью.)

Задача 155. Проведите экспериментальную проверку для задачи 154. Пусть скорость течения 10 м/мин, одно деление на оси соответствует 10 метрам,
а) скорость мальчика — 40 м/мин, скорость девочки — 30 м/мин;
б) скорость мальчика — 30 м/мин, скорость девочки — 40 м/мин.

П0, М0, Д0 — точка, в которой находился плот с мальчиком и девочкой в момент их прыжков. Отметьте на оси точки П1, М1, Д1, в которых плот, мальчик и девочка окажутся через 1 минуту. Также отметьте точки П2, М2, Д2, П3, М3, Д3 и П4, М4, Д4.



Задача 156*. [10, Занятие 6, задача 2] Катер проплывает 90 км по течению за то же время, что и 70 км против течения. Какое расстояние за то же время проплывёт плот? *Подсказка.* Можно использовать задачу 154!

Задача 157*. Города A и B находятся на берегу прямой реки на расстоянии 10 км друг от друга. На что у парохода уйдёт больше времени: проплыть от A до B и обратно, **или** проплыть 20 км по озеру?

Задача 158. Проведите экспериментальную проверку для задачи 157 про пароход, заполнив следующую таблицу. Сделайте вывод, выбрав вариант ответа ниже.

расстояние	$v_{\text{собств}}$	$t_{\text{по озеру}}$	$v_{\text{теч}}$	$v_{\text{по теч}}$	$t_{\text{по теч}}$	$v_{\text{против}}$	$t_{\text{против}}$
120 км	10 км/ч		2 км/ч				
75 км	20 км/ч		5 км/ч				
	36 м/мин	1 мин 40 сек			$1\frac{2}{13}$ мин		
	40 м/мин	2,5 мин			$1\frac{3}{7}$ мин		

а) всегда по реке дольше
б) всегда по озеру дольше
в) всегда одинаково
г) зависит от скоростей

Задача 159*. [11] Пароход вниз по реке идёт от А до В трое суток, а от В до А — пять суток. Сколько времени будут плыть плоты от А до В? *Подсказка.* Можно использовать задачу 154!

Список литературы

[1] С.А. Шестаков, И.В. Ященко. *Математика. Многоуровневый сборник задач. 7–9 классы. Часть 1. Алгебра.* Москва. Просвещение. 2020.

[2] И.М. Гельфанд, А. Шень. *Алгебра.* МЦНМО. 4-е изд. 2017. https://www.mccme.ru/free-books/shen/gelfand-shen-algebra.pdf

[3] Шаповалов А.В., Ященко И.В. *Вертикальная математика для всех. Готовимся к задаче С6 ЕГЭ с 6-го класса.* МЦНМО. 2014.

[4] Мерзон Г.А., Ященко И.В., *Длина, площадь, объём.* М.: МЦНМО, 2011. https://www.mccme.ru/free-books/yaschenko/dimensions.pdf

[5] Е.Г.Козлова. *Сказки и подсказки: задачи для математического кружка.* Москва. МЦНМО. 2004. https://www.mccme.ru/free-books/pdf/kozlova.pdf

[6] И.В. Раскина. *Логика для всех. От пиратов до мудрецов.* МЦНМО. 2016.

[7] Турнир Математических боёв им А.П. Савина tursavin.ru.

[8] Н. К. Верещагин, А. Шень. *Начала теории множеств.* Издание пятое, стереотипное. Москва. Издательство МЦНМО. 2017.

https://mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part1-5ed.pdf

[9] Н. Я. Виленкин. *Рассказы о множествах.* 3-е издание. МЦНМО. 2005.

https://mccme.ru/free-books/vilenkin-rasomn.pdf

[10] Чулков П.В. «*Арифметические задачи*». МЦНМО. 2015.

[11] С.А. Дориченко, «*По течению и против*». Журнал Квантик. 2012 год, №4. http://old.kvantik.com/art/files/pdf/2012-04.2-6.pdf