

Примерные задачи переводного экзамена по математике
2017-18 уч. год, 10 класс

Алгебра, математический анализ.

1. Уравнение прямой на плоскости, параллельной (перпендикулярной) заданной прямой; угол между прямыми.

Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;1)$ и перпендикулярной прямой $y = x + 1$.

2. Графики функций, содержащих модуль. Построение графиков с помощью преобразований.

Построить а) $y = \cos x - \sin x$, б) $y = 3\cos(2x + \pi/4)$, в) $y = 2|x + 1| + 3$

3. Область определения функции (логарифмической, обратной тригонометрической, иррациональной) $y = \log_{x+0.5}(2x^2 - 7x + 6)$.

4. Преобразование выражений с логарифмами

Вычислить а) $\log_{\sqrt{2}} \cos(\pi/8) + \log_{\sqrt{2}} \cos(3\pi/8)$; б) $\log_{\sqrt[3]{2}}(\sqrt[5]{2}) + \log_7(\sqrt[3]{343})$

5. Квадратные уравнения с параметром, применение теоремы Виета. Наименьшее (наибольшее) значение квадратичной функции.

а) Найдите все значения параметра p , при которых корни квадратного трехчлена $3x^2 + 6x + p - 1$ различны и удовлетворяют неравенству $x_1^2 + x_2^2 \leq 5$.

б) Найти наибольшее значение функции $f(x) = (1 - x^2 - 2x)^3$.

6. Уравнения (неравенства) с модулем. $\frac{x^2 + |x| - 12}{x - 3} \geq 2x$

7. Схема Горнера. Возвратные уравнения; уравнения, сводящиеся к квадратным. Корни многочленов с целыми коэффициентами.

Решите уравнение $x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0$ (ответ $1; 2; \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$)

8. Четность (нечетность) функции, периодичность. Разрывы, асимптоты.

а) Является ли функция $y = \cos^3 x - 5\sin x + x^2$ четной или нечетной?

б) Найти период функции $y = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$.

в) Найти точки разрыва функции $f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x^2+2x-3)}$ и определить их вид. Найти

асимптоты графика.

9. Промежутки монотонности, критические точки, точки экстремума.

а) Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$,

б) Исследовать на монотонность $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 4$,

в) Найти критические точки, исследовать на монотонность $y = x + \cos x$

10. Уравнение касательной.

а) На кривой $y = 2x^2 - x + 15$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y = -3x + 1$;

б) Найдите сумму координат точки пересечения касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 2x^2 - 9x - 4$ в его точке с абсциссой, равной 3, с осью ординат.

11. Упростить: а) $\frac{17}{2} - \sqrt{11} + \frac{5\sqrt{66}}{11\sqrt{6} - 6\sqrt{11}} - \sqrt{6}$, б) $\frac{x + 6\sqrt{x} + 8}{\sqrt{x} + 4} - \frac{x + 6\sqrt{x-2} + 6}{\sqrt{x-2} + 4}$

Геометрия.

1. Построение сечения (в пирамиде, призме, параллелепипеде):
через три точки; параллельно прямой через данную прямую; через точку параллельно данной плоскости. Доказать, что сечение искомое.
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Провести в нем сечение плоскостью, проходящей через середины ребер AA_1 и CC_1 и точку M на ребре D_1C_1 , $|D_1M|=2|MC_1|$. Определить вид получившегося сечения.
2. Сечения в прямоугольном параллелепипеде плоскостью, перпендикулярной заданной прямой. Доказать, что построенное сечение искомое.
3. Найти площадь сечения. Вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми, расстояние от точки до плоскости, угол между плоскостями, доказать, что найденная величина искомая.
 $ABCDE$ - четырехугольная пирамида, $ABCD$ - прямоугольник, $AB=4$, $AD=12$. Боковое ребро EA перпендикулярно плоскости основания $ABCD$ и имеет длину 3. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми AD и EC .
4. Угол между прямыми, расстояние от точки до прямой.
В кубе $ABCA'D'B'C'D'$ со стороной равной 12, найти расстояние от вершины D' до прямой PH , где H – середина ребра AD , точка P лежит на ребре DC , причём $DP : PC = 1 : 2$.
5. В декартовой системе координат:
 - 1) Найти вектор, ортогональный плоскости (ABC) , площадь треугольника ABC , если $A(1,2,1)$, $B(0,3,-1)$, $C(4,1,2)$.
 - 2) Представить вектор $\vec{d} = (-1;1;5)$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a} = (3;0;2)$, $\vec{b} = (-3;2;4)$, $\vec{c} = (1;1;1)$;
 - 3) Выяснить, являются ли 2 вектора $\vec{a}_1 = (-1;-2;5)$, $\vec{a}_2 = (2;-3;1)$ линейно зависимыми. Будут ли линейно зависимыми $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, где $\vec{a}_3 = (1;0;6)$?
 - 4) Лежат ли 4 точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ в одной плоскости?
 - 5) Даны 4 точки $A(1;1-2)$, $B(2;3;7)$, $C(0;4;7)$, $D(-1;2;-2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник.

Тригонометрия.

- 1) Вычислить $\sin(0,5 \arccos(1/9))$.
- 2) Уравнения $\sin 2x \cos(x + \pi/3) + \sin(x + \pi/3) \cos 2x = \sqrt{3}/2$.
- 3) Уравнения с отбором корней
Найдите корни уравнения $2 \cos(2\pi x - \frac{\pi}{3}) + \sqrt{2} = 0$, удовлетворяющие условию $2 < x < 4$
- 4) Упростите выражение: $\sin 20^\circ \sin 80^\circ + \sin 10^\circ \sin 70^\circ$. Вычислить без калькулятора $\operatorname{tg} 255^\circ + \operatorname{tg} 195^\circ$.
- 5) Построить график $y = -2 \arccos(x+3)$, $y = \cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x$.
- 6) Уравнения (неравенства), содержащие обратные тригонометрические функции:
решить $(x^2 - 9) \arcsin \frac{x - \pi}{\pi} = 0$.
- 7) Найти множество значений функции $f(x) = 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x$. (указание: привести к виду $f(x) = 3 + 2 \sin^2 x$)