ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К СЕМЕСТРОВОЙ РАБОТЕ.

10 класс. 1-й семестр. 2017-2018 учебный год.

1. Задача на использование свойств функции.

1.1. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечетной и периодической с периодом 8. На промежутке $[-4;0]$ она задана равенством $f(x)=2|x+2|-4$. Найдите значение $f(3); f(-7)$.

1.2. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечетной и периодической с периодом 8. На промежутке $[0;4]$ задана равенством $f(x)=-2|x-2|+4$. Найдите значение $f(3); f(-7)$.

1.3. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является четной и периодической с периодом 4. На промежутке $[0;4]$ задана равенством $f(x)=2|x-2|-4$. Найдите значение $f(3); f(-7)$.

1.4. Функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой, является четной и периодической с периодом 4. На промежутке $[-4;0]$ задана равенством $f(x)=-2|x+2|+4$. Найдите значение $f(3); f(-7)$.

2. Нахождение множества значений функции.

2.1. $f(x)=\frac{\cos 2x+2sin^2x}{1-\sin 3x}$;

2.2. $f(x)=\frac{\cos 4x+2sin^2 2x}{1-\cos 5x}$;

2.3. $f(x)=-18-18\cos 6x-12\cos 3x$;

2.4. $f(x)=4-2\cos 4x+4\sin 2x$;

2.5. $f(x)=3+2\sin x-\cos 2x$;

2.6. $f(x)=11-x^2-2\sqrt{9-x^2}$

2.7. $f(x)=\frac{15}{7+8sinx}$; $f(x)=\frac{18}{3+6sinx}$;

2.8. $f(x)=sin^2x-6sinx$;

2.9. $f(x)=sin^2x+2sinx+3$;

2.10. $f(x)=\frac{sin^2x+4sinx}{cos^2x-sin^2x}$;

2.11. $f(x)=cos^6x+sin^6x+3cos^2xsin^2x$.

3. Решит неравенство, содержащее переменную под знаком модуля.

3.1. $\left||x^2-8x+2|-x^2\right|\geq 2x+2$;

3.2. $\left||x^2+5x-18|-x^2\right|\geq 18-x$;

3.3. $\left||x^2-9x+6|-x^2\right|\leq 6-x$;

3.4. $\left||x^3+x-3|-5\right|\leq x^3-x+8$

3.5. $\left||x^2-3x+2|-1\right|>x-2$;

3.6. $\left|2x+5-|3x-1|\right|\geq x+2$.

4. Исследование числа решений уравнения, содержащего знаки модулей, в зависимости от параметра.

4.1. $\left||x-3|-1\right|+1=kx$

4.2. $\left||x-5|-2\right|+1=kx$

4.3. $|x+1|+|x-1|=kx+1$

4.4. $|x+1|-|x-1|=k(x-1)$

5. Уравнения высших степеней.

5.1. $\frac{x^4-2x^3-3x^2+x-3}{x-3}=2x+1$

5.2. $x^4-4{,}5x^3+7x^2-4{,}5x+1=0$

5.3. $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)=297$;

5.4. $(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0$

5.5. $4x^4-8x^3+3x^2-8x+4=0$;

5.6. $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$;

5.7. $(3x^2-7x-2)^2+5x^2(3x^2-7x-2)=24x^4$.

6. Задача на расположение корней квадратного трехчлена.

6.1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение не имеет решений > 3
$ax^2+2(a-2)x+a-3=0$.

6.2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет хотя бы одно решение < 3
$ax^2-x-3a+2=0$.

6.3. Найти все значения параметра a, при которых все решения уравнения ≥ -3
$ax^2-(3a+1)x+3=0$.

6.4. Найти все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение ≥ -1
$(a+1)x^2-2(a-3)x+a-1=0$.

6.5. Найти все значения параметра p, при которых все числа из интервала $(7;13)$ являются решениями неравенства
$x^2-(3p+12)x+(p+3)(2p+9)\leq 0$.

6.6. Найти все значения параметра p, при которых все числа из интервала $(2;3)$ являются решениями неравенства

$$x^2-(2p-4)x+(p-5)(p+1)\leq 0$$

6.7. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$x^2+ax+a^2+6a<0$$

выполнено для всех $x\in(1;2)$.

7. Преобразование тригонометрических выражений.

Упростить:

7.1. $\frac{ctg^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)\cdot cos^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{11\pi}{2}\right)}{ctg^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}$;

7.2. $\frac{cos^{-1}\alpha\cdot\left(tg\frac{\alpha}{2}-ctg\frac{\alpha}{2}\right)}{tg\left(\frac{\alpha}{2}+3\pi\right)-tg\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)}$;

7.3. $\frac{cos^2(\alpha-270^0)}{sin^{-2}(\alpha+90^0)-1}+\frac{sin^2(\alpha+270^0)}{cos^{-2}(90^0-\alpha)-1}+\frac{cos\alpha\cdot tg7\pi}{sin^3\alpha}$;

7.4. $\frac{sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}{tg\alpha-tg7\pi}\cdot\frac{(tg(\pi+\alpha)-cos^{-1}\alpha)}{cos\alpha+tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$.

7.5. Найти значение выражения $\frac{sin4\alpha cos2\alpha}{(1+cos2\alpha)(1+cos4\alpha)}$, если $ctg\alpha=-\frac{4}{5}$

7.6. Найти значение выражения $\frac{sin\alpha-2sin2\alpha+sin3\alpha}{cos\alpha-2cos2\alpha+cos3\alpha}$, если $tg\alpha=3$

7.7. Найти значение выражения $3\,\frac{sin2\alpha-sin3\alpha+sin5\alpha}{1+cos\alpha-2sin^22\alpha}$, если sinα= $\frac{1}{3}$

7.8. Найти значение выражения $\frac{2sin\alpha - sin2\alpha}{2sin\alpha + sin2\alpha}$, если $tg\frac{\alpha}{2} = 2$

7.9. Найти значение выражения $\frac{sin\alpha}{sin\alpha - cos\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}}$, если $cos\alpha = 0{,}7$

7.10. Найти значение выражения $\frac{sin\alpha - 3cos\alpha}{0{,}5sin\alpha}$, если $tg\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 2$

8. **Задача на нахождение угла между прямой и плоскостью.**

8.1. На ребре AB правильного тетраэдра MABC взята точка P так, что AP = PB. Найдите углы, который образуют с плоскостью MAC прямые: в)CP; б)BC.

8.2. На ребрах CD и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P и Q – середины этих ребер. Найдите углы, которые образуют с диагональной плоскостью AA_1CC_1 следующие прямые: а)C_1D; б)C_1P; в)C_1Q.

8.3. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедрен- ный (AB = BC) треугольник ABC. Точки K и M — середины рёбер A_1B_1 и AC соответственно. а) Докажите, что KM = KB. б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB1, если AB = 8, AC = 6 и AA1 = 3.

8.4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ AB = 2, AD = AA1 = 1. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

8.5. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

8.6. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD, все рёбра которой равны 1, точка E — середина ребра SB. Найдите угол между прямой CE и плоскостью SBD.

9. **Задача на нахождение расстояния от точки до плоскости, угла между плоскостями.**

9.1. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что A_1E : EA = 3 : 4. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что AB = 9, AD = 6, AA_1 = 14. а) В каком отношении плоскость ET D_1 делит ребро BB_1? б) Найдите угол между плоскостью ET D_1 и плоскостью AA_1B_1

9.2. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что P A = AQ = RC = 2. а) Докажите, что плоскость P QR перпендикулярна ребру SD. б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости P QR

9.3. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём BK = C_1L = 2. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L. Найдите расстояние от точки B до плоскости γ.

9.4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$сторона AB основания равна 12, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{6}$. На рёбрах AB и B_1C_1 отмечены точки K и L соответственно, причём AK = 2,

9.5. B_1L = 4. Точка M — середина ребра A_1C_1. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L. Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

9.6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 5, боковые ребра равны 2, точка D – середина ребра CC_1. а)Постройте прямую пересечения плоскостей ABC и ADB_1.б)Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

9.7. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат ABCD со стороной 4, а высота призмы равна $\sqrt{17}$. Точка E лежит на диагонали BD_1 и BE = 1. а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E. б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью ABC.

9.8. В треугольной пирамиде SABC с основанием ABC точка M – середина ребра SA, точка К – середина ребра SB, O – точка пересечения медиан основания.а) Докажите, что плоскость CMK делит отрезок SO в отношении 3: 2, считая от вершины S. б) Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если пирамида правильная, SC = 6, AB = 4.

9.9. Основание пирамиды SABCD – квадрат ABCD. Боковое ребро SD перпендикулярно плоскости основания. Точка M – середина высоты пирамиды.а) Докажите, что прямая SB параллельна плоскости ACM. б) Найдите расстояние от точки B до плоскости ACM, если AB = 8, а угол между плоскостью ACM и плоскостью основания пирамиды равен 45º

9.10. В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с отношением ребер $AB:AA_1$=2:3 точка K – середина ребра CC_1. Найдите углы, которые образует плоскость AB_1K со следующими плоскостями: а)ABC; б)BC_1;в)ABB_1.

9.11. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ AA_1:AB = 3:2. На ребре A_1B_1 взята точка D – середина этого ребра, а на ребрах BC и CC_1 взяты соответственно точки P и Q. Найдите углы между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через прямую BD, параллельную прямой PQ, в каждом следующих случаев: а) BP:BC = 1:2; $CQ:CC_1$ = 1:2; б) BP:BC = 3:4, а точка Q совпадает с точкой C_1;в) BP:BC = 1:4, а точки Q и C_1 совпадают.

10. **Задача на нахождение площади сечения.**

10.1. В правильной четырёхугольной пирамиде MABCD с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

10.2. В правильной треугольной пирамиде MABC стороны основания ABC равны 6, а боковые рёбра равны 8. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что CD = BE = LM = 2. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

10.3. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На ребрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки P, N и K соответственно, причемAP = A_1N = C_1K=2. Найти площадь сечения призмы плоскостью PNK.

10.4. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что A_1E = 6EA. Точка T – середина ребра B_1C_1. Известно, что AB = $4\sqrt{2}$, AD = 12, AA_1 = 14. Найти площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

10.5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ проведено сечение плоскостью, проходящей через середину T ребра AB, точку B_1 и точку P, лежащую на ребре AC и делящую его в отношении AP :PC = 1:3. Найти площадь сечения, если известно, что сторона основания призмы равна $8\sqrt{2}$, а высота призмы равна $16\sqrt{2}$.

10.6. Через середину ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, середину ребра BC и точку P на ребре DD_1 (D_1P: PD = 1:3) проведена плоскость. Найти площадь сечения куба этой плоскостью, если ребро куба равно 16.