Задачи для подготовки к семестровой контрольной работе

10 класс 2017-2018 учебный год

Задание № 1

Тригонометрическое уравнение с отбором корней на отрезке (Уровень ЕГЭ)

Решить уравнение и указать корни, принадлежащие отрезку

- $\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0,$ $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$
- $3\cos 2x + 5\sin x + 1 = 0,$ $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$
- $\sin 6x - \cos\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt{2}\sin\left(5x - \frac{\pi}{2}\right),$ $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$
- $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos x = 0,$ $[-4\pi;\ -3\pi]$

Задание № 2

Нахождение значения производной в точке.

- Дана $f(x) = \dfrac{2\lg x}{\lg e} - \dfrac{1}{4}x$. Найдите $f'(2)$.
- Дана $f(x) = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right)$. Найдите $f'(1)$.
- Дана $f(x) = \dfrac{4}{\pi^2}x^3 + \sin x$. Найдите $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
- Дана $f(x) = e^{1-x}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$. Найдите $f'(1)$.

Задание № 3

Иррациональное уравнение.

Решить уравнение:

- $\sqrt{x + 2} \cdot \sqrt{2x + 1} = x + 4$
- $\sqrt{2x^2 + 3x - 1} + x = -1$
- $\sqrt{x - 1} - \sqrt{4x - 3} = 1$
- $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} - \sqrt{-2x^2 + 8x - 5} = 0$

Задание № 4

Преобразование и сравнение логарифмических выражений.

- Упростить A=$\dfrac{\log_{\sqrt{7}}14-\frac{1}{3}\log_{\sqrt{7}}56}{\log_{\sqrt{6}}30-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}150}$; сравнить A и $\log_2\dfrac{5}{2}$.
- Упростить A=$\left(\log_3 2^{5,1}-\log_3 2^{1,7}-\log_3 8\right)\cdot\log_2 3$; сравнить A и $\log_3\dfrac{3}{2}$.
- Упростить A=$12^{\log_3 5\log_4 5\left(\log_3 5+\log_4 5\right)^{-1}}$ и B=$7^{0,25\log_7 16}+3\log_3\sqrt{5}\cdot\log_{25}81$; сравнить A и B.
- Упростить A=$5^{\log_{\sqrt{5}}4-\log_5 2+2\log_{25}3}$; сравнить A и $8\log_2 9$.

Задание № 5

Найдите область определения функции.

- $y=\ln\left(|x-1|\cdot\left(\sqrt{2x^2-10x+21}-3\right)\right)$.
- $y=\sqrt{10^{\frac{2}{x-7}}\cdot\ln\dfrac{x^2+9x}{x^2+7x+12}}$
- $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)\left(x^2-3x+2\right)\cdot\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{x+3}}}$
- $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-5x+4}{5-x}\cdot\arcsin\dfrac{x+4}{4}}+\log_{x+1}7$

Задание № 6

Дробно-рациональное неравенство с параметром.

- Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\dfrac{x-3a-1}{x+2a-6}<0$ выполнено хотя бы для одного $x\in[2;4]$.
- Найти все значения параметра a, при которых неравенство $\dfrac{x+a-5}{x^2-(2+a)x+5a-15}>0$ выполняется для всех $x\in[6;7]$.
- Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\dfrac{x^2+(a-1)x-a}{x+2a-1}\le 0$ выполняется для всех значений из отрезка [2;3].

- Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\frac{x^2-(a-3)x-3a}{x+a-2}\geq 0$ выполняется хотя бы для одного значения x из отрезка $[-5;-4]$.

Задание № 7

Стереометрия с доказательством.

- В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что PA = AQ = RC = 2.
  а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.
  б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.
- В правильной треугольной призме ABCA1B1C1 сторона основания AB равна , а боковое ребро AA1 равно 3. На ребре AB отмечена точка К так, что AК = 1. Точки M и L — середины рёбер A1C1 и B1C1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки К и L.
  а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ;
  б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.
- В правильной треугольной призме ABCA1B1C1 сторона основания $7\sqrt{3}$, а боковое ребро AA1 = 8.
  а) Докажите, что плоскость BCA1 перпендикулярна плоскости проходящей через ребро AA1 и середину ребра B1C1.
  б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA1 и BB1C1.
- В основании пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со стороной AB = 4 и диагональю BD = 7. Все боковые рёбра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания ABCD отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что SF = BE = 3.
  а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
  б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.
- Дана пирамида PABCD, в основании — трапеция ABCD с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны основанию, прямые AB и CD пересекаются в точке K.
  а) Доказать, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD.
  б) Найдите расстояние от точки К до плоскости PBC, если AB = BC = CD = 2, а PK = 12.
- Дана четырёхугольная пирамида SABCD с прямоугольником ABCD в основании. Сторона AB равна 4, а BC равна $3\sqrt{2}$. Вершина

пирамиды S проектируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника. Из вершин A и C на ребро SB опущены перпендикуляры AP и CQ.

а) Докажите, что точка P является серединой отрезка BQ.

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC, если ребро SD равно 8.

- В правильной четырёхугольной пирамиде PABCD сторона основания ABCD равна 12, боковое ребро PA — $12\sqrt{2}$. Через вершину A проведена плоскость α, перпендикулярная прямой PC и пересекающая ребро PC в точке K.

  а)Докажите, что плоскость α делит высоту PH пирамиды PABCD в отношении 2:1, считая от вершины P.

  б) Найдите расстояние между прямыми PH и BK.

Задание № 8

Система уравнений с параметром.

- Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y-1=4a(x-1), \\ \dfrac{2y}{|x|+x}=\sqrt{y} \end{cases}$$

  имеет хотя бы одно решение.

- Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2y}{|x|+x}=\sqrt{y}, \\ \dfrac{y-1}{x-1}=4a \end{cases}$$

  имеет хотя бы одно решение.

- Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-a)^2=25(y-x+a-4), \\ \dfrac{2-\sqrt{y}}{2-\sqrt{x}}=1 \end{cases}$$

  имеет хотя бы одно решение.

- Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+y+1}-1}{\sqrt{x}-1} = 1, \\ (x+a)^2 + (y-a-5)(y-a) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = \sqrt{2(y+|y|)}, \\ x - 4 = a(y-3) \end{cases}$$

имеет единственное решение

Задание № 9

Площадь сечения.

- Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B, равным 90°, и углом C, равным 30°. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C, параллельной прямой AM, где M – середина бокового ребра BB_1, и пересекающей сторону AC в точке D так, что $CD = 2AD$, если расстояние от точки C до секущей плоскости равно $\sqrt{\frac{16}{21}}$, а гипотенуза основания равна $\sqrt{2}$.
- Основанием пирамиды TABC служит треугольник ABC с углом C, равным 90°, углом A, равным 30°, и гипотенузой AB, равной $2\sqrt{2}$. Высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра TB, точку N, лежащую на ребре TC так, что $CN = 2TN$, и параллельной медиане TD боковой грани ATB, если расстояние от вершины A до секущей плоскости равно $\sqrt{\frac{9}{7}}$.
- Основанием пирамиды TABC служит равнобедренный треугольник ABC с углом B, равным 90°, и катетом, равным 6, а её высота совпадает

с медианой ТО боковой грани ТАС. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через середину бокового ребра ТА, пересекает сторону основания АВ в точке М так, что $BM = 2AM$, и параллельна медиане основания AD, если расстояние от вершины пирамиды Т до секущей плоскости равно $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

- Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом В, равным 90°, и углом С, равным 30°. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C, вершину В и параллельной диагонали AB_1боковой грани AA_1B_1B, если расстояние от вершины С до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна $\sqrt{14}$.

Задание № 10

Уравнение (неравенство) с параметром, содержащее тригонометрические функции.

- Найдите все значения параметра с, при которых уравнение $2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right) = c$ имеет решения.
- Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $\sqrt{a\sin x + \cos x} = \sqrt{a\cos x + \sin x}$ имеет решения на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.
- Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решения.
- Найдите все значения параметра а, при которых неравенство $2 + \sqrt{\frac{a^2x^2}{\pi^2} - 10\frac{ax}{\pi} + 25} \le \sqrt{2 + 2\sin 2x}$ имеет решения на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}\right]$.
- Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $2\sin x + \cos x = a$ имеет единственное решения на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.